TÁVKÖZLÉSI ÉS MÉDIAINFORMATIKAI TANSZÉK (TMIT)
BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM (BME)

Mozgásmodellezés

Lukovszki Csaba

Áttekintés

- Probléma felvázolása
  - Szabadsági fokok
  - Diszkretizált
  - Hibát tartalmaz
  - Késleltetés
- Interpoláció
  - Lineáris
  - Polinomiális
  - Spline
- Extrapoláció
  - ...
  - Konstans sebesség
  - Konstans késleltetés
- Inerciális mérésekkel segített
  - IMU
  - EKF

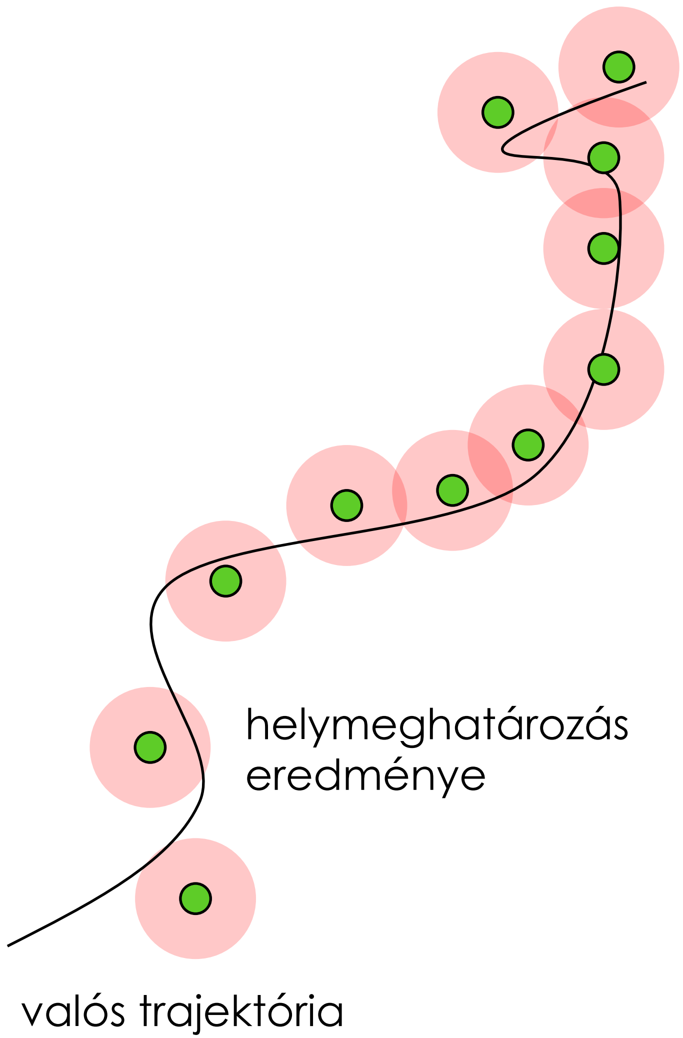
Szabadság fokok

- Milyen szolgáltatást szeretnénk megvalósítani
  - A vizsgált eszköz/személy mozgása
- A technológiai lehetőségek
  - Az egyes helymeghatározási technológiák, módszerek milyen lehetőségeket hordoznak
- Rádiós helymeghatározás
  - 3DoF
- Autó a földön
  - 1DoF
- Szabad mozgás kézben
  - 6DoF
- Ember mozgás
  - 3DoF

Probléma felvázolása

- A feladat
  - A megfigyelt objektum helyének és helyzetének pontos megállapítása bármikor
- A helymeghatározás
  - Diszkrét időpontokban
  - Hibát hordoznak
  - Késleltetve jelennek meg

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{real}(t_k) + \boldsymbol{\varepsilon}_k$$

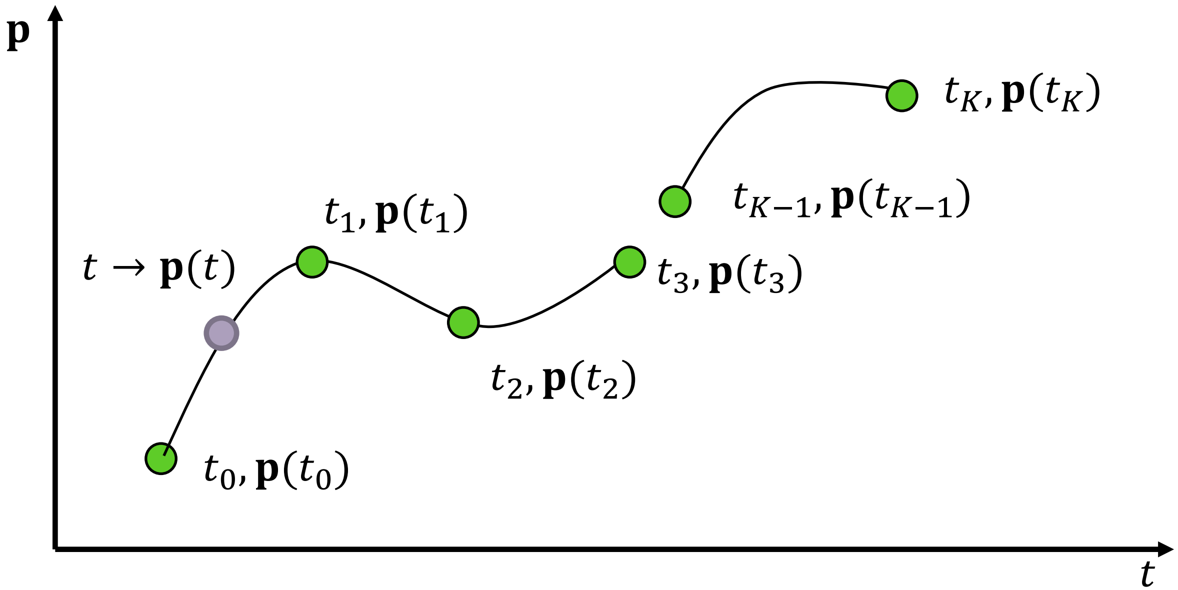


Mozgás becslés

- Interpoláció
  - A minták alapján összefüggő útvonalakat (helyeket és/vagy helyzeteket) keresünk
    - Lineáris
    - Polinomiális
    - Spline
- Extrapoláció
  - Az eddigi minták alapján kitaláljuk milyen a várható hely és/vagy orientáció
    - ...
    - Konstans sebesség/gyorsulás
    - Szenzor fúzió
- Lehetséges bejárható útvonalak figyelembe vétele
  - Útvonalra illesztés
  - Előző helyek figyelembe vétele
- A hibák figyelembe vétele szerint lehet
  - Determinisztikus
  - Valószínűségi alapú

Interpoláció

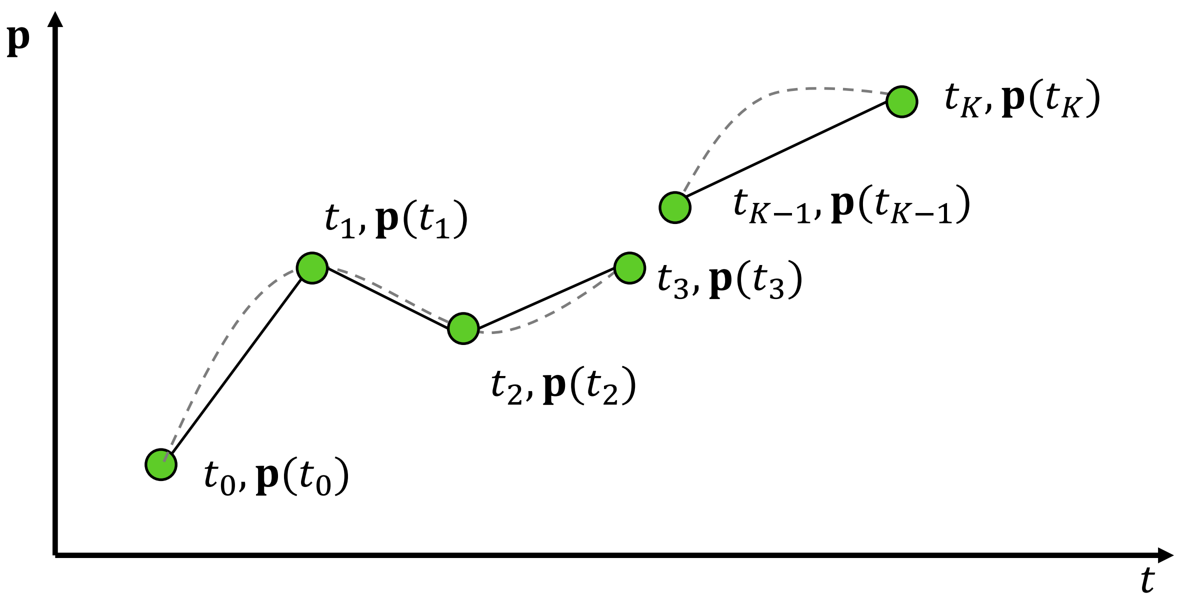
- Adott értékpárok
  - $t_k \to \mathbf{p}(t_k), \quad k = [0,1 \ldots K]$
- Keressük a nem meghatározott $\mathbf{p}(t)$ hely értékeket tetszőleges $t \neq t_k$ időpontokhoz



Lineáris interpoláció

- Interpoláció szakaszonként
  - $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0(t_0) + \frac{\mathbf{p}_1(t_1)-\mathbf{p}_0(t_0)}{t_1-t_0}(t - t_0), \qquad t_0 \le t \le t_1$
  - $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_1(t_1) + \boxed{\frac{p_2(t_2)-p_1(t_1)}{t_2-t_1}}(t - t_1), \qquad t_1 \le t \le t_2$
  - …

Slope, meredekség



Polinomiális (másodfokú) interpoláció

- Interpoláció szakaszonként
  - Másodfokú közelítés
    - $\mathbf{p}(t) = \boldsymbol{a}_1 t^2 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{c}_1, \qquad t_0 \le t \le t_1$
    - …
    - $\mathbf{p}(t) = \boldsymbol{a}_K t^2 + \mathbf{b}_K t + \mathbf{c}_K, \qquad t_{K-1} \le t \le t_K$
  - Peremfeltételek
    - $\mathbf{a}_1 t_0^2 + \mathbf{b}_1 t_0 + \mathbf{c}_1 = \mathbf{p}(t_0), \quad \mathbf{a}_1 t_1^2 + \mathbf{b}_1 t_1 + \mathbf{c}_1 = \mathbf{p}(t_1)$
    - …
    - $\mathbf{a}_K t_{K-1}^2 + \mathbf{b}_K t_{K-1} + \mathbf{c}_K = \mathbf{p}(t_{K-1}), \quad \mathbf{a}_K t_K^2 + \mathbf{b}_K t_K + \mathbf{c}_K = \mathbf{p}(t_K)$
  - 2K egyenlet → aluldefiniált
    - Szomszédos minták figyelembe vétele
    - Folytonosság garantálása

Spline interpoláció

- A szomszédos szakaszok első deriváltjának egyezése garantálja a folytonosságot
  - 1. szakasz: $\frac{d}{dt}(\mathbf{a}_1 t^2 + \mathbf{b}_1 t^2 + \mathbf{c}_1) = 2\mathbf{a}_1 t + \mathbf{b}_1, \quad t_0 \le t \le t_1$
  - 2. szakasz: $\frac{d}{dt}(\mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{b}_2 t^2 + \mathbf{c}_2) = 2\mathbf{a}_2 t + \mathbf{b}_2, \quad t_1 \le t \le t_2$
- A szakaszhatárokon $t = t_1$
  - $2\mathbf{a}_1 t_1 + \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{a}_2 t_1 + \mathbf{b}_2$
  - $2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)t_1 + (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = 0$
  - További K-1 egyenlet
    - Pl. az első szakasz lineáris

Extrapoláció konstans sebesség alapján

- A legutóbbi állapot után nyugalomban marad:
  - Konstans sebesség
- Következő állapot:

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n + \mathbf{v}_n \Delta t_n + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \boldsymbol{\kappa}_{n+1}$$

- Állapotvektorral ($\mathbf{x}_n$) felírva

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Delta t \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}_{n+1}$$

- A sebesség számítása
  - Egy lépéses: $\mathbf{v}_n = \frac{\Delta \mathbf{p}_n}{\Delta t_n} = \frac{\mathbf{p}(t_n) - \mathbf{p}(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}$
  - Átlag: $\mathbf{v}_n = \frac{1}{i} \sum_{j=n-i+1}^{n} \frac{\Delta \mathbf{p}_j}{\Delta t_j} = \frac{1}{i} \sum_{j=n-i+1}^{n} \frac{\mathbf{p}(t_j) - \mathbf{p}(t_{j-i})}{t_j - t_{j-i}}$

Extrapoláció konstans gyorsulás alapján

- A legutóbbi állapot után dinamikai állapot állandó:
  - Konstans gyorsulás
- Következő állapot:

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n + \mathbf{v}_n \Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$$
$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{a}_n \Delta t + \boldsymbol{\kappa}_{n+1}$$
$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\xi}_{n+1}$$

- Állapotvektorral ($\mathbf{x}_n$) felírva

$$\begin{bmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{v}\\\mathbf{a}\end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & \Delta t & 0\\0 & \mathbf{I} & \Delta t\\0 & 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{p}\\\mathbf{v}\\\mathbf{a}\end{bmatrix}_{n} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\\boldsymbol{\kappa}\\\boldsymbol{\xi}\end{bmatrix}_{n+1}$$

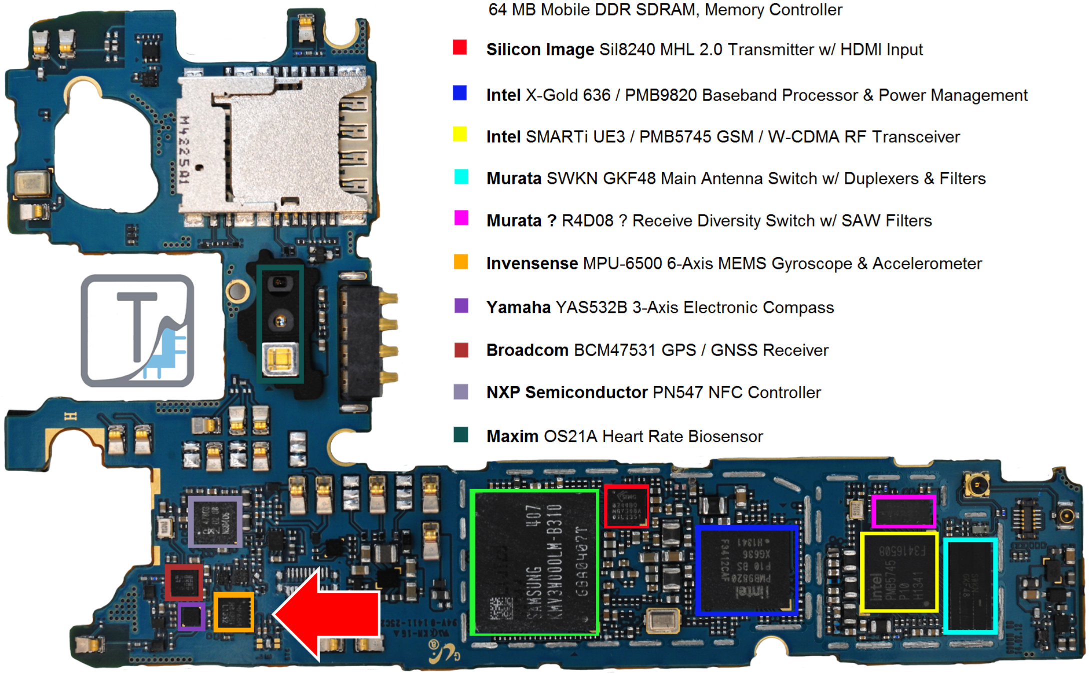
SZENZOR FÚZIÓ

Inerciális Szenzorok

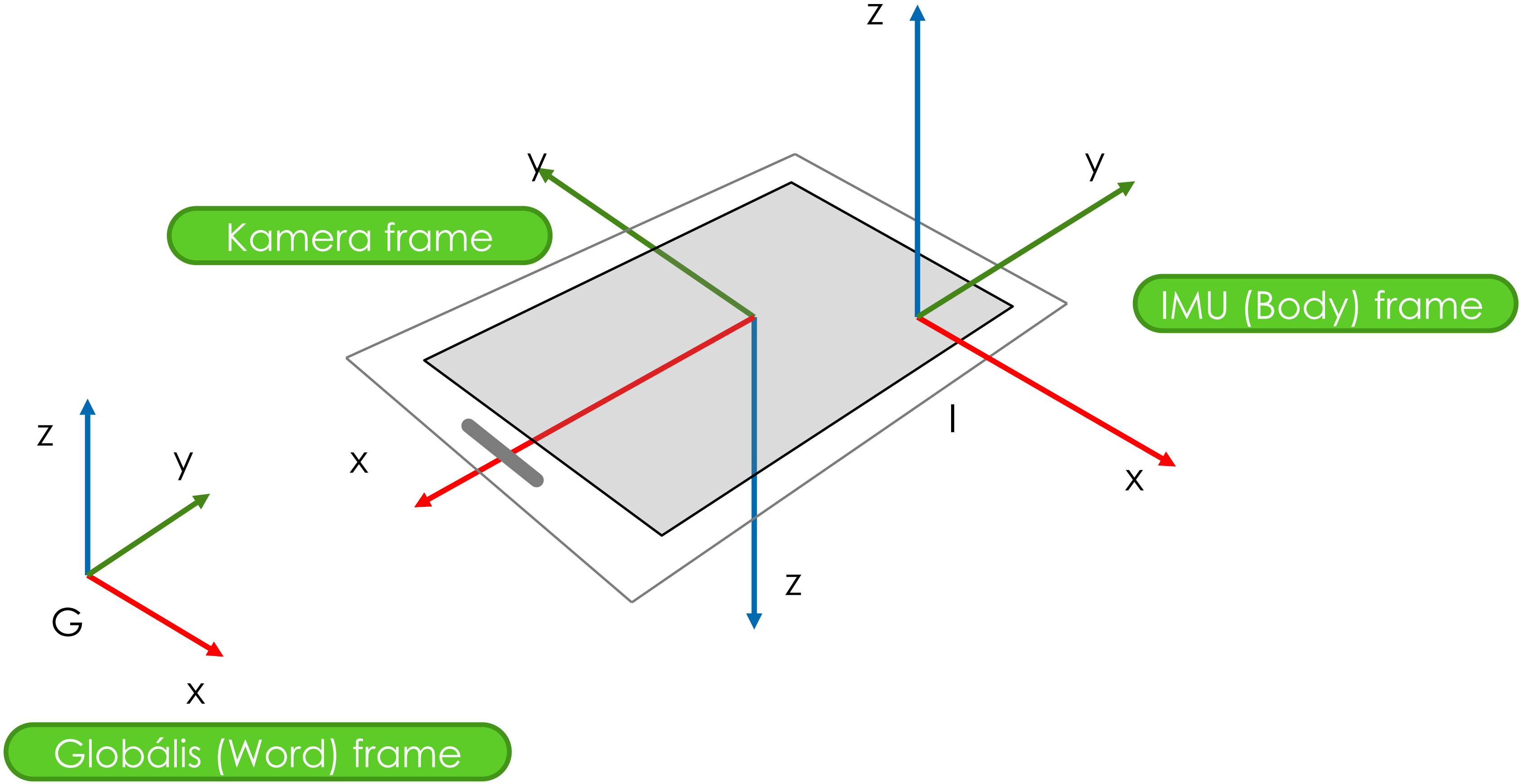
- Inerciális szenzorok
    - Mobil eszközökben széles körben elterjedt (MEMs)
  - Gyorsulásmérő
  - Giroszkóp
  - Mágneses szenzor
- Modellezés
  - A matematikai modellek csak közelítik a valós működést
  - A pontos modell a működés megértésén alapul

Inertial Measurement Unit (IMU)

- Integrált megoldás
  - Gyorsulás érzékelő, giroszkóp
- Pontos, jól modellezhető
- Elterjedt megoldás



Mobil vonatkoztatási rendszerek



Vonatkoztatási rendszerek, jelölések

- Pozíció
  - $\mathbf{p}_G$: pozíció a globális koordináta rendszerben
  - $\mathbf{p}_{I,G}$: az I koordináta rendszer a globális koordináta rendszerben
- Orientáció
  - $\mathbf{q}_I, \mathbf{R}_I$: az IMU koordináta rendszerében értelmezett orientáció, rotáció
  - $\mathbf{q}_{GI}, \mathbf{R}_{GI}$: passzív kvaternió, rotáció az IMU koordináta rendszerből a globális koordináta rendszerbe
- Koordináta rendszerek közötti transzformáció
  - $\mathbf{p}_G = \mathbf{R}_{GI}\mathbf{p}_C + \mathbf{p}_{I,G}$: az IMU koordináta rendszerben értelmezett helyvektor értelmezése a globális térben
- Az egyértelmű indexeket elhagyjuk

A gyorsulásmérő modellezése

- A gyorsulásmérő az IMU-hoz rögzített koordináta rendszerben az eszköz aktuális gyorsulását méri 3D-ben ($\mathbf{a} \in \Re^3, \frac{m}{s}$)
  - Az eszköz relatív helyváltoztatásának mérésében van szerepe
- A mért érték hibákkal terhelt
  - Zaj (*Noise*): modellezése fehér zajjal $(\mathbf{a}_n), \mathbf{a}_n \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}_{a_n})$
  - Eltolódás (*Bias*): normális eloszlás szerinti véletlen bolyongás $(\mathbf{a}_b), \mathbf{a}_w \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}_{a_w})$, ahol $\dot{\mathbf{a}_b} = \mathbf{a}_w$
  - Rossz helyzet és skála hiba (*Missalignment and scale errors*): modellezése átskálázással $(\mathbf{T}_a), \mathbf{T}_a = \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}$

$$\mathbf{a}_{m,I} = \mathbf{T}_a \mathbf{R}_{IG}(\mathbf{a}_G - \mathbf{g}_G) + \mathbf{a}_{b,I} + \mathbf{a}_{n,I}$$

  - .

A giroszkóp modellezése

- A giroszkóp aktuális szögsebességet mér ($\omega \in \Re^3, \frac{rad}{s}$) az eszközhöz rendelt saját koordináta rendszerben
  - Az orientáció meghatározásában van szerepe
- A mért érték hibákkal terhelt
  - Zaj (*Noise*): modellezése fehér zajjal $(\boldsymbol{\omega}_n), \boldsymbol{\omega}_n \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}_{\omega_n})$
  - Eltolódás (*Bias*): normális eloszlás szerinti véletlen bolyongás $(\boldsymbol{\omega}_b), \boldsymbol{\omega}_w \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}_{\omega_w})$, ahol $\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{\omega}_w$
  - Rossz helyzet és skála hiba (*Missalignment and scale errors*): modellezése átskálázással $(\mathbf{T}_\omega), \mathbf{T}_\omega = \mathbf{I} + \epsilon$
  - Gyorsulás érzékenység (g-sensitivity): transzformáció $(\mathbf{T}_s), \mathbf{T}_s = \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\omega}_{m,I} = \mathbf{T}_\omega \boldsymbol{\omega}_I + \mathbf{T}_s \mathbf{a}_I + \boldsymbol{\omega}_{n,I} + \boldsymbol{\omega}_{b,I}$$

  - .

Kálmán szűrő (KF)

Diszkrét, lineáris modell, normális eloszlás

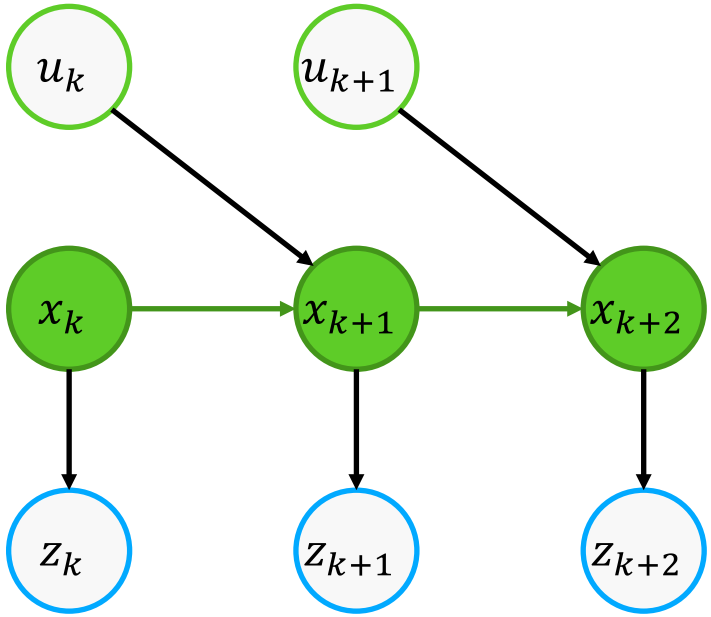
Vezérlés (Control)

Aktuális állapottól független

Állapot (State)

Megfigyelés (Observation)

Aktuális állapottól függő



KF, vezérlés

- Állapot átmenet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{q}_k, \qquad \mathbf{q} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$$

- Jelölések
  - Diszkrét idejű állapot átmeneti mátrix: $\mathbf{A}_k = e^{\mathbf{A}(t_k)\Delta t}$
  - Diszkrét idejű vezérlési mátrix: $\mathbf{B}_k$
- Az $\mathbf{x}_{k+1}$ eloszlásának meghatározása
  - $\mathbf{x}_k \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_k)$
  - $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ közös eloszlás, majd marginalizáció

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ A_k\hat{\mathbf{x}}_k + B_k\mathbf{u}_{k-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k & \mathbf{P}_k A_t^T \\ A_k\mathbf{P}_k & A_k\mathbf{P}_k A_k^T + \mathbf{Q}_k \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} \sim \mathcal{N}(A_k\hat{\mathbf{x}}_k + B_k\mathbf{u}_{k-1}, A_k\mathbf{P}_k A_k^T + \mathbf{Q}_k)$$

- Predikciós lépés:
  - $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} \leftarrow A_k\hat{\mathbf{x}}_k + B_k\mathbf{u}_{k-1}$
  - $\mathbf{P}_{k+1} \leftarrow A_k\mathbf{P}_k A_k^T + \mathbf{Q}_k$

KF, megfigyelés

- Megfigyelés

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k, \qquad \mathbf{r}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$$

- Jelölések
  - Megfigyelési mátrix: $\mathbf{H}_k$
- Az $\mathbf{x}_k$ eloszlásának meghatározása
  - $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k)$ közös eloszlás, majd feltétel bevezetés
    - $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ H_k\hat{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k & \mathbf{P}_k H_t^T \\ H_k\mathbf{P}_k & H_k\mathbf{P}_k H_k^T + \boldsymbol{R}_k \end{bmatrix}\right)$
    - $\boldsymbol{x}_k|_{z_k=z_0} \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_k + K_k(z_0 - H_k\hat{\mathbf{x}}_k), \mathbf{P}_k - K_k H_k \mathbf{P}_k$
    - $K_k = \boxed{\mathbf{P}_k H_k^T (H_k \mathbf{P}_k H_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}}$ Kalman nyereség
- Frissítési lépés
  - $\hat{\mathbf{x}}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k + \mathrm{K}_\mathrm{k}\boxed{(\mathbf{z}_\mathrm{k} - \mathrm{H}_\mathrm{k}\hat{\mathbf{x}}_k)}$ residual
  - $\mathbf{P}_k \leftarrow \mathbf{P}_k - K_k H_k \mathbf{P}_k$

EKF

- Nemlineáris modell, normális eloszlás
  - Állapotátmenet

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{q}_k, \qquad \mathbf{q} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$$

  - Megfigyelés

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}_k, \qquad \mathbf{r}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$$

- Linearizálás a munkapont körül
  - $\mathbf{A}_k = \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}_k} |_{\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k}$
  - $\mathbf{H}_k = \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}_k} |_{\hat{\mathbf{x}}_k}$

Inerciális mérések integrálása

- Vezérlő jelek
  - IMU mérésekből
    - Gyorsulásmérő
    - Giroszkóp
  - Mintha zajos vezérlés lenne
- Mérés
  - GPS adat
  - Képi adatfeldolgozás
  - Távolság alapú helymeghatározás
    - WiFi lateráció
    - UWB lateráció

Belső állapotok ($\mathbf{x}_k$)

- Azon paraméterek, melyek lehetővé teszik a rendszer pontos állapotának nyomonkövetését
  - Inerciális mérésekhez tartozó
    - Kinematika
      - $\mathbf{q}_k$: az eszköz orientációja (kvaternió)
      - $\mathbf{p}_k$: az eszköz becsült helyzete (helyvektor)
      - $\mathbf{v}_k$: az eszköz aktuálisan becsült sebessége
    - IMU modell
      - $\mathbf{a}_b$: gyorulásmérő nullponti eltolása
      - $\boldsymbol{\omega}_b$: a giroszkóp nullponti eltolása
      - ... Egyéb, a modell szerinti (torzítás, zaj)
  - Megfigyelésekhez tartozó
    - Milyen technológiát használunk a megfigyelések során

Propagáció IMU mérések alapján

- A propagálás során a belső állapotok megváltoznak Δt idő alatt
  - Kinematikai egyenletek
    - $\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes (\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b)$
    - $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}$
    - $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}_{GI}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b) + \mathbf{g}$
  - A nominális állapotok megváltozása
    - $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b)\Delta \mathrm{t}\}$
    - $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p} + \mathbf{v}\Delta t + \frac{1}{2}(\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b) + \mathbf{g})\Delta \mathrm{t}^2$
    - $\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + (\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b) + \mathbf{g})\Delta \mathrm{t}$
    - $\mathbf{a}_b \leftarrow \mathbf{a}_b$
    - $\boldsymbol{\omega}_b \leftarrow \boldsymbol{\omega}_b$

IMU és Kamera

- Valós képi elemek nyomonkövetése alapján
  - A projekció paramétere a kamera
    - Valós helye és
    - Helyzete
- Megvalósítások
  - EKF
    - Az állapotvektor
      - A nyomon követett jellemző térbeli pontok
  - MSCKF
    - Az állapotvektor
      - A kamera megelőző m darab helye és helyzete