

Helymeghatározási alapelvek és módszerek

Helymeghatározás alapjai

Hollósi Gergely¹

¹Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék

2015

Miről lesz szó a továbbiakban?

- ▶ Helymeghatározás alapjai
 - ▶ Alapvető fogalmak
 - ▶ A helymeghatározás feladata, módszerei
 - ▶ A helymeghatározási feladat megoldása
- ▶ Helymeghatározás hullámterjedés alapján
 - ▶ Rádiós technológiák és egyéb hullámterjedés alapján működő technológiák
- ▶ Inerciális helymeghatározás
- ▶ Vizuális helymeghatározás

Helymeghatározási alapok

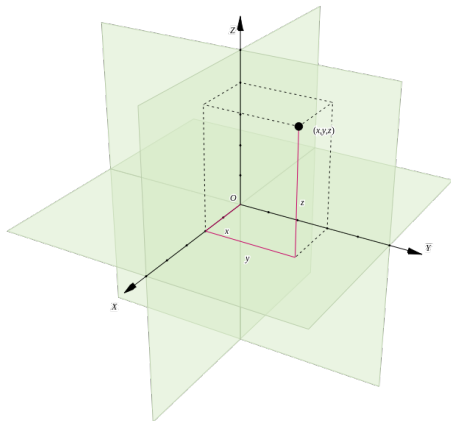
Hely és orientáció

- ▶ hely: ahol állunk
- ▶ orientáció: amerre nézünk
- ▶ matematikai definíció
 - ▶ viszonyítási hely választás, koordinátarendszer

Descartes koordinátarendszer

Koordinátarendszerek

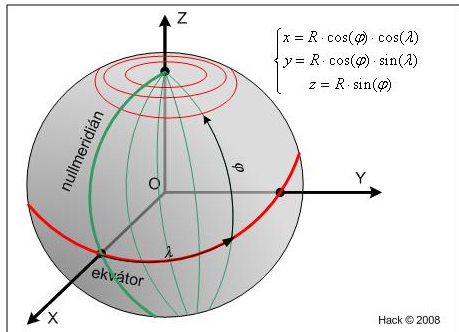
- ▶ Derékszögű koordinátarendszer három bázisvektorral
- ▶ A koordináták az egyes tengelyvetületek (skaláris szorzat)



Gömbi koordinátarendszer

Koordinátarendszerek

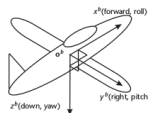
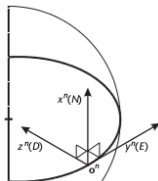
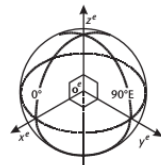
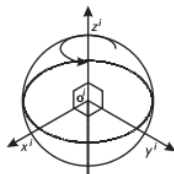
- ▶ Origótól való távolság és két szög
- ▶ Geodetikus koordináták
- ▶ Polárkoordináták
- ▶ Ekvatoriális koordináták (ábrán)
- ▶ azimuth, elevation



A koordinátarendszer elhelyezkedése – hol legyen az origó?

Koordinátarendszerek

- ▶ ECI – Earth Centered Inertial Frame
- ▶ ECEF – Earth Centered Earth Fixed Frame
- ▶ Local frame
- ▶ Body frame

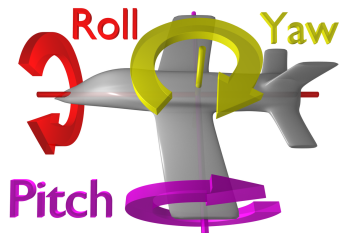


Euler szögek

Orientáció

- ▶ Az orientáció szabadságfoka 3 → leírható három paraméterrel
- ▶ Kézenfekvő: Euler-szögek (α , β , γ)

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$
$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$
$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Euler szögek

Orientáció

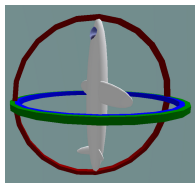
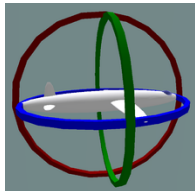
- ▶ A forgatás egyszerű szorzás: $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$

- ▶ A forgatási mátrixok összefűzhetők:

$$R = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

- ▶ Euler-szögek problémái:

- ▶ Forgatási mátrix 9 elemű \leftrightarrow 3 szabadsági fok
- ▶ Gimbal lock jelenség \rightarrow szabadsági fok veszteség
- ▶ Egy forgatás, több lehetőség α, β, γ értékekre
- ▶ Nehezen interpolálható két orientáció



Kvaternió

Orientáció

- ▶ A kvaterniók a komplex számok kiterjesztései:

$$Q = w + xi + yj + zk \rightarrow \mathbf{q} = [w \ x \ y \ z]^T$$

- ▶ A három imagináriusra igaz, hogy $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, amiből $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$

- ▶ Alapvető tulajdonságok

- ▶ Létezik összeadás és szorzás
- ▶ A szorzás nem kommutatív, de asszociatív és disztributív
- ▶ Konjugált: $\mathbf{q}^* = [w \ -x \ -y \ -z]^T$
- ▶ Inverz: $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* / \|\mathbf{q}\|$
- ▶ Norma definiált: $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$
- ▶ Felírható Euler alakban ($\|\mathbf{u}\| = 1$):
$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad \leftrightarrow \quad e^{\mathbf{u}\phi} = \cos \phi + \mathbf{u} \sin \phi$$

Kvaternió

Orientáció

- ▶ A forgatás egyszerűen az Euler formula kiterjesztése
 - ▶ Nézzünk egy ϕ szöggel történő forgatást az $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ tengely körül, ahol $\|\mathbf{u}\| = 1$
 - ▶ Forgassuk el a $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$ hagyományos vektort
 - ▶ Az elforgatott vektor $\mathbf{p}' = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$
 - ▶ A forgatást jelképező kvaternió:
$$\mathbf{q} = e^{\frac{\theta}{2}(u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k})} = \cos \frac{\theta}{2} + (u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}) \sin \frac{\theta}{2}$$
- ▶ A kvaternió nagy előnye, hogy
 - ▶ négy paramétert használ,
 - ▶ nincs gimbal lock

Rodrigues formula

Orientáció

- ▶ Minimális reprezentáció: 3 paraméter
- ▶ Jelöljük a forgatási tengelyt egy egységvektorral ($\mathbf{u} = [x \ y \ z]^T$), a forgatás szögét ϕ -vel
- ▶ A forgatást jelképező vektor így $\mathbf{v} = \phi \mathbf{u}$
- ▶ A vektorhoz tartozó forgatási mátrix (Rodrigues formula):
$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi [\mathbf{u}]_{\times} + (1 - \cos \phi) [\mathbf{u}]_{\times}^2$$
- ▶ $[\mathbf{u}]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$ a keresztszorzat mátrix

Helymeghatározás

Mit értünk helymeghatározás alatt?

Helybecslési feladat megfogalmazása

- ▶ A helymeghatározás a valamilyen technikával/technológiával mért mennyiségek alapján a hely és az orientáció meghatározása.
 - ▶ Számos technika és technológia rendelkezésre áll
 - ▶ Nem minden esetben kell/lehet orientációt meghatározni
- ▶ Legyen a felhasználó helye egy koordinátarendszerben \mathbf{l} , az orientációja \mathbf{v} !
- ▶ Adott technológiával történő az \mathbf{x} mérések kifejezhetők egy f függvény szerint

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{l}, \mathbf{v}) + \mathbf{x}_n$$

- ▶ \mathbf{x}_n a mérések technológiától is függő zaja és hibája
- ▶ *A helymeghatározás feladata az egyenlet megoldása valamilyen „jósági” feltételek mellett*

Bevezetés

Helybecslési technikák

- ▶ Milyen alapvető módszerekkel tudjuk a helyet meghatározni?
- ▶ Pontosabban: milyen tipikus $f(\mathbf{l}, \mathbf{v})$ függvényeket ismerünk?
- ▶ Ki végzi a mérést és a helymeghatározást?
 - ▶ aktív szemlélet
 - ▶ passzív szemlélet

Összehasonlítás alapú módszer

Helybecslési technikák

- ▶ Közel ismeretlen, de időinvariáns és (feltételezhetően) invertálható f függvények esetén
- ▶ A technika lényege, az f függvényt mintavétellel határozzuk meg kijelölt pontokban
 - ▶ Ún. kalibráció
 - ▶ Ismert \mathbf{l} és \mathbf{v} helyen és orientációban megmérjük \mathbf{x} értékét
- ▶ Tipikus megvalósítások
 - ▶ WiFi RSSI alapú mérés
 - ▶ Mágneses tér mérés

Közelségérzékelés módszer

Helybecslési technikák

- ▶ Hasznos technika, ha a technológia lehetővé teszi, hogy egy ismert helyzetű eszköz felismerje, hogy céleszköz a közelében van
- ▶ Legyen I darab fix I_i helyen található eszközünk. Ekkor

$$f(\mathbf{l}, \mathbf{v}) = \begin{cases} i & , \text{ha } \| \mathbf{l}_i - \mathbf{l} \| < d \\ 0 & , \text{egyébként} \end{cases}$$

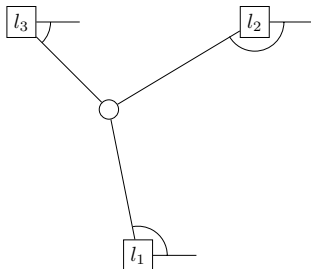
, ahol d a technológia által lehetővé tett maximális távolság

- ▶ Tipikus technológiák
 - ▶ Rfid
 - ▶ NFC
 - ▶ Cella/szektor szintű helymeghatározás

Rálátási szög alapján

Helybecslési technikák

- ▶ A rálátási szög alapú módszer (gyakran trianguláció) lényege, hogy rögzített helyekről ismerjük a rálátási szöget
- ▶ Egy síkon egyenesek, három dimenzióban kúpok
- ▶ Technológiák
 - ▶ tipikusan rádiós technológiák, mint például WiFi, Bluetooth
 - ▶ DoA – Direction of Arrival



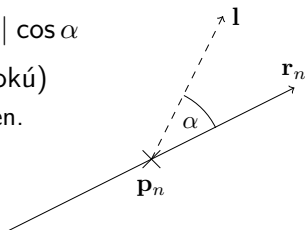
Rálátási szög alapján

Helybecslési technikák

- ▶ Tételezzük fel, hogy van N darab horgonypontunk, amelyek a szögeket mérik, melyek a \mathbf{p}_n pontokban találhatóak, és az \mathbf{r}_n egységvektor irányában látják a nulla szöget!
- ▶ Ekkor

$$(\mathbf{l} - \mathbf{p}_n)\mathbf{r}_n = |\mathbf{l} - \mathbf{p}_n| \cos \alpha$$

- ▶ Az egyenletrendszer nem lineáris (másodfokú)
 - ▶ Minden szöghöz egy kúp tartozik a térben.
 - ▶ A síkon vett görbék hiperbolák



└ Rálátási szög alapján

- Tételezzük fel, hogy van N darab horgonypontunk, amelyek a szöveget mérik, melyek a p_i pontokban találhatók, és az r_i egységvektor irányában látják a nulla szöveget!
- Ekkor
$$(1 - p_i)r_i = |1 - p_i| \cos \alpha$$
- Az egyenletrendszer nem lineáris (másodfokú)
 - Minden szöghez egy kör tartozik a térben.
 - A szöveg vett görbék hiperbolák

1. Az irányok körülfordatva a tengely körül kúpokat alkotnak. Ebből nyilvánvaló, hogy egy síkkal (például a talajjal) metszve hiperbolákat, ellipsziseket vagy kört kapunk (kúpszelet).
2. A $\cos \alpha$ miatt a szög előjele nem számít.
3. Érdeemes megemlíteni, hogy bizonyos esetekben nem csak egy szöveget, hanem szövegpárt is tudunk mérni. Ebben az esetben az irányok egy dimenziós egyeneseket alkotnak.

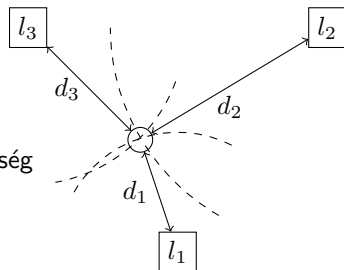
Távolságmérés alapján

Helybecslési technikák

- ▶ A távolságmérés a mérendő objektum és a horgonypontok közötti pont-pont távolságból határozza meg a helyet.
- ▶ A korábbi jelölésekkel az egyenletek:

$$|\mathbf{l} - \mathbf{p}_n| = d_n$$

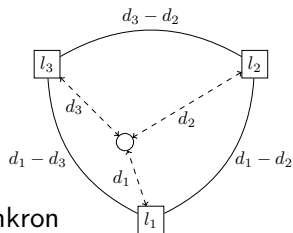
- ▶ Szintén nem lineáris egyenletrendszer
 - ▶ gömbökön elhelyezkedő pozíciók
- ▶ Technológiák
 - ▶ tipikusan rádiós megoldások időméréssel
 - ▶ ritka önmagában, inkább távolságkülönbség



Távolságkülönbség mérés alapján

Helybecslési technikák

- ▶ A mérés során két horgonypont közötti távolságkülönbséget tudjuk megmérni
- ▶ Ebből következően az egyenletek:
$$|\mathbf{l} - \mathbf{p}_i| - |\mathbf{l} - \mathbf{p}_j| = d_{i,j}$$
- ▶ N darab horgonypont esetén $\binom{N}{2}$ egyenlet
- ▶ Síkon tekintve hiperbolákat kapunk
- ▶ Előnye, hogy időmérés esetén nem kell időszinkron
- ▶ Technológiák:
 - ▶ WiFi TDoA
 - ▶ GNSS



└ Távolságkülönbség mérés alapján

- A mérés során két horgonypont közötti távolságkülönbséget tudjuk megmérni
- Ebből következik az egyenlet:

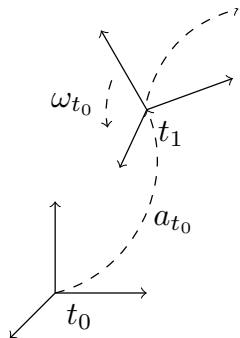
$$| | - \mathbf{p}_i | - | | - \mathbf{p}_j | = d_{i,j}$$
- N darab horgonypont esetén $\binom{N}{2}$ egyenlet
- Síkon tekintve hiperbolákat kapunk
- Előnye, hogy időmérés esetén nem kell időszinkron
- Technológiák:
 - WiFi, TDoA
 - GNSS

1. A távolságot tipikusan időméréssel valósítják meg. Ismerve a c terjedési sebességet, a távolság $s = c\tau$, amennyiben τ a mért terjedési idő.
2. A terjedési idő méréséhez – amennyiben az nem körülfordulással, tehát vétel után visszasugárzással történik – az adó és vevő között időszinkron szükséges. Távolságkülönbség mérése azonban időszinkron nélkül is megvalósítható.

Inerciális odometria

Helybecslési technikák

- ▶ Odometria → különböző szenzorok jelei alapján útvonal meghatározás
 - ▶ gyorsulásérzékelő
 - ▶ giroszkóp
- ▶ A gyorsulásérzékelő a *készülék* koordinátarendszerében megadja a gyorsulás irányát és mértékét
- ▶ A giroszkóp a forgási sebességet méri
- ▶ A két szenzor ismeretében a készülék pályája számítható
 - ▶ A zajok miatt a helyzet bizonytalansága egyre nő



Inerciális odometria

Helybecslési technikák

- ▶ Az inerciális odometria egyenletei folytonos időben (zaj és hibák nélkül)

$$\dot{\mathbf{l}}_t = \mathbf{v}_t$$

$$\dot{\mathbf{v}}_t = R(\mathbf{q}_t)\mathbf{a}_t + \mathbf{g}_t$$

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t$$

$$\dot{\mathbf{g}}_t = 0$$

- ▶ \mathbf{l}_t jelöli a készülék helyét, \mathbf{q}_t pedig a helyzetét, $R(\mathbf{q}_t)$ a kvaternióhoz tartozó forgatási mátrix
- ▶ \mathbf{a}_t és $\boldsymbol{\omega}_t$ a szenzorok t időpillanatban érvényes értékei
- ▶ \mathbf{g}_t a gravitációs vektor

└ Inerciális odometria

Inerciális odometria

Helybecélési technikák

- Az inerciális odometria egyetlen folyamatos időben (zaj és hibák nélkül)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}}_t &= \mathbf{v}_t \\ \mathbf{v}_t &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_t) \mathbf{a}_t + \mathbf{g}_t \\ \dot{\mathbf{q}}_t &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t \\ \dot{\mathbf{g}}_t &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

- \mathbf{I}_t jelöli a készületek helyzetét, \mathbf{q}_t pedig a helyzetét, $\mathbf{R}(\mathbf{q}_t)$ a kvaternióhoz tartozó forgatási mátrix.
- \mathbf{a}_t és $\boldsymbol{\omega}_t$ a szenzorok t időpillanatban érvényes értékei
- \mathbf{g}_t a gravitációs vektor

1. A $\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t$ sor a helyzet változását jelképezi. A kifejezés egy $\boldsymbol{\omega}_t$ szögsebességű elfordulás (határértékben vett) kicsiny hatását írja le.

Vizuális helymeghatározás

Helybecslési technikák

- ▶ Kamerával és az általa rögzített képekkel történő helymeghatározás
 - ▶ A kamera a 3D teret leképezi 2D-re
- ▶ A vetítési egyenlet:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{X} = K [R|\mathbf{t}] \mathbf{X}$$

- ▶ K a belső kameramátrix, R az orientációs mátrix és \mathbf{t} a helytől és orientációtól függő vektor
- ▶ \mathbf{x} a kameraképen látható pont koordinátái, \mathbf{X} a térbeli pont koordinátái
- ▶ Az \mathbf{X} pontok lehetnek
 - ▶ előre ismertek kalibráció által \rightarrow abszolút helymeghatározás
 - ▶ előre nem ismertek \rightarrow visual odometry
- ▶ A későbbiekben részletesen bemutatjuk

Referencia

- ▶ A képek a következő helyekről származnak:
 - ▶ Wikipedia
 - ▶ Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, Paul D. Groves