# Helymeghatározási alapelvek és módszerek

## Helymeghatározás alapjai

Hollósi Gergely[1]

[1]Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék

2015

# Miről lesz szó a továbbiakban?

- Helymeghatározás alapjai
  - Alapvető fogalmak
  - A helymeghatározás feladata, módszerei
  - A helymeghatározási feladat megoldása
- Helymeghatározás hullámterjedés alapján
  - Rádiós technológiák és egyéb hullámterjedés alapján működő technológiák
- Inerciális helymeghatározás
- Vizuális helymeghatározás

# Helymeghatározási alapok

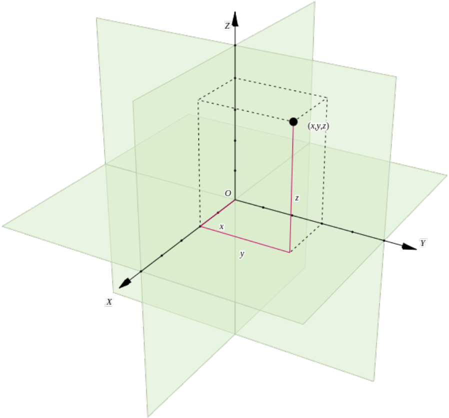
# Hely és orientáció

- hely: ahol állunk
- orientáció: amerre nézünk
- matematikai definíció
  - viszonyítási hely választás, koordinátarendszer

# Descartes koordinátarendszer

## Koordinátarendszerek

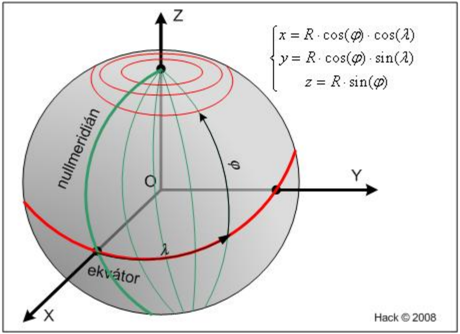
- Derékszögű koordinátarendszer három bázisvektorral
- A koordináták az egyes tengelyvetületek (skaláris szorzat)



# Gömbi koordinátarendszer

## Koordinátarendszerek

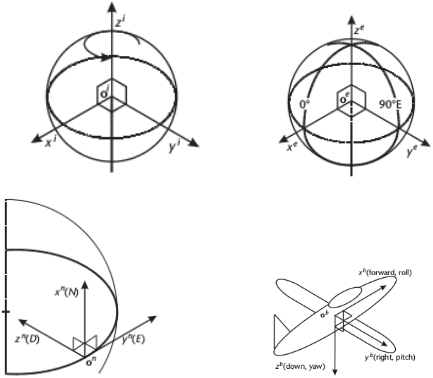
- Origótól való távolság és két szög
- Geodetikus koordináták
- Polárkoordináták
- Ekvatoriális koordináták (ábrán)
- azimuth, elevation



# A koordinátarendszer elhelyezkedése – hol legyen az origó?

## Koordinátarendszerek

- ECI – Earth Centered Inertial Frame
- ECEF – Earth Centered Earth Fixed Frame
- Local frame
- Body frame



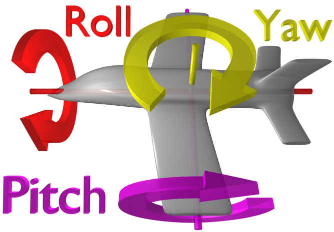
# Euler szögek
## Orientáció

- Az orientáció szabadságfoka 3 $\rightarrow$ leírható három paraméterrel
- Kézenfekvő: Euler-szögek $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

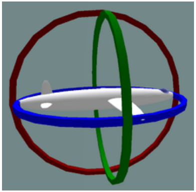
$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



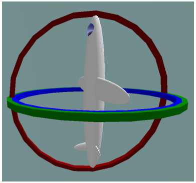
# Euler szögek

## Orientáció

- A forgatás egyszerű szorzás: $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$
- A forgatási mátrixok összefűzhetők:
  $R = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$



- Euler-szögek problémái:
  - Forgatási mátrix 9 elemű $\leftrightarrow$ 3 szabadsági fok
  - Gimbal lock jelenség $\rightarrow$ szabadsági fok vesztés
  - Egy forgatás, több lehetőség $\alpha, \beta, \gamma$ értékekre
  - Nehezen interpolálható két orientáció



# Kvaternió

## Orientáció

- A kvaterniók a komplex számok kiterjesztései:
  $Q = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{q} = \begin{bmatrix} w & x & y & z \end{bmatrix}^T$
- A három imagináriusra igaz, hogy $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, amiből $ij = k,\ jk = i,\ ki = j$
- Alapvető tulajdonságok
  - Létezik összeadás és szorzás
  - A szorzás nem kommutatív, de asszociatív és disztributív
  - Konjugált: $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} w & -x & -y & -z \end{bmatrix}^T$
  - Inverz: $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* / \parallel \mathbf{q} \parallel$
  - Norma definiált: $\parallel \mathbf{q} \parallel = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$
  - Felírható Euler alakban ($\parallel \mathbf{u} \parallel = 1$):
    $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \quad \leftrightarrow \quad e^{\mathbf{u}\phi} = \cos\phi + \mathbf{u}\sin\phi$

# Kvaternió
## Orientáció

- A forgatás egyszerűen az Euler formula kiterjesztése
  - Nézzünk egy $\phi$ szöggel történő forgatást az $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ tengely körül
  - Forgassuk el a $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$ hagyományos vektort
  - Az elforgatott vektor $\mathbf{p}' = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$
  - A forgatást jelképező kvaternió: $\mathbf{q} = e^{\frac{\theta}{2}(u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}+u_z\mathbf{k})} = \cos\frac{\theta}{2} + (u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k})\sin\frac{\theta}{2}$
- A kvaternió nagy előnye, hogy
  - négy paramétert használ,
  - nincs gimbal lock

# Rodrigues formula

## Orientáció

- Minimális reprezentáció: 3 paraméter
- Jelöljünk a forgatási tengelyt egy egységvektorral ($\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$), a forgatás szögét $\phi$-vel
- A forgatást jelképező vektor így $\mathbf{v} = \phi\mathbf{u}$
- A vektorhoz tartozó forgatási mátrix (Rodrigues formula): $\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\phi[\mathbf{u}]_\times + (1 - \cos\phi)[\mathbf{u}]_\times^2$
- $[\mathbf{u}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$ a keresztszorzat mátrix

# Helymeghatározás

# Mit értünk helymeghatározás alatt?

## Helybecslési feladat megfogalmazása

- A helymeghatározás a valamilyen technikával/technológiával mért mennyiségek alapján a hely és az orientáció meghatározása.
  - Számos technika és technológia rendelkezésre áll
  - Nem minden esetben kell/lehet orientációt meghatározni
- Legyen a felhasználó helye egy koordinátarendszerben $\mathbf{l}$, az orientációja $\mathbf{v}$!
- Adott technológiával történő az $\mathbf{x}$ mérések kifejezhetők egy $f$ függvény szerint

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{l}, \mathbf{v}) + \mathbf{x}_n$$

- $\mathbf{x}_n$ a mérések technológiától is függő zaja és hibája
- *A helymeghatározás feladata az egyenlet megoldása valamilyen „jósági" feltételek mellett*

# Bevezetés

## Helybecslési technikák

- Milyen alapvető módszerekkel tudjuk a helyet meghatározni?
- Pontosabban: milyen tipikus $f(\mathbf{l}, \mathbf{v})$ függvényeket ismerünk?
- Ki végzi a mérést és a helymeghatározást?
  - aktív szemlélet
  - passzív szemlélet

# Összehasonlítás alapú módszer

## Helybecslési technikák

- Közel ismeretlen, de időinvariáns és (feltételezhetően) invertálható $f$ függvények esetén
- A technika lényege, az $f$ függvényt mintavétellel határozzuk meg kijelölt pontokban
  - Ún. kalibráció
  - Ismert $\mathbf{l}$ és $\mathbf{v}$ helyen és orientációban megmérjük $\mathbf{x}$ értékét
- Tipikus megvalósítások
  - WiFi RSSI alapú mérés
  - Mágneses tér mérés

# Közelségérzékelés módszer

## Helybecslési technikák

- Hasznos technika, ha a technológia lehetővé teszi, hogy egy ismert helyzetű eszköz felismerje, hogy céleszköz a közelében van
- Legyen $I$ darab fix $\mathbf{l}_i$ helyen található eszközünk. Ekkor

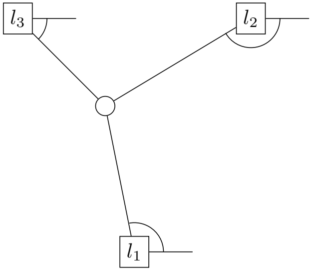
$$f(\mathbf{l},\mathbf{v}) = \begin{cases} i & \text{,ha } \parallel \mathbf{l}_i - \mathbf{l} \parallel < d \\ 0 & \text{,egyébként} \end{cases}$$

  , ahol $d$ a technológia által lehetővé tett maximális távolság
- Tipikus technológiák
  - RfID
  - NFC
  - Cella/szektor szintű helymeghatározás

# Rálátási szög alapján

## Helybecslési technikák

- A rálátási szög alapú módszer (gyakran trianguláció) lényege, hogy rögzített helyekről ismerjük a rálátási szöget
- Egy síkon egyenesek, három dimenzióban kúpok
- Technológiák
  - tipikusan rádiós technológiák, mint például WiFi, Bluetooth
  - DoA – Direction of Arrival

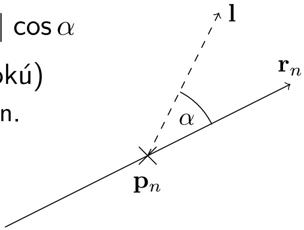


# Rálátási szög alapján

## Helybecslési technikák

- Tételezzük fel, hogy van $N$ darab horgonypontunk, amelyek a szögeket mérik, melyek a $\mathbf{p}_n$ pontokban találhatók, és az $\mathbf{r}_n$ egységvektor irányában látják a nulla szöget!
- Ekkor

$$(\mathbf{l} - \mathbf{p}_n)\mathbf{r}_n = |\ \mathbf{l} - \mathbf{p}_n\ | \cos\alpha$$




- Az egyenletrendszer nem lineáris (másodfokú)
  - Minden szöghöz egy kúp tartozik a térben.
  - A síkon vett görbék hiperbolák

## Rálátási szög alapján

Helybecslési technikák

- Tételezzük fel, hogy van $N$ darab horgonypontunk, amelyek a szögeket mérik, melyek a $\mathbf{p}_n$ pontokban találhatók, és az $\mathbf{r}_n$ egységvektor irányában látják a nulla szöget!
- Ekkor

$$(\mathbf{l} - \mathbf{p}_n)\mathbf{r}_n = \mid \mathbf{l} - \mathbf{p}_n \mid \cos\alpha$$

- Az egyenletrendszer nem lineáris (másodfokú)
  - Minden szöghöz egy kúp tartozik a térben.
  - A síkon vett görbék hiperbolák

1. Az irányok körülforgatva a tengely körül kúpokat alkotnak. Ebből nyilvánvaló, hogy egy síkkal (például a talajjal) metszve hiperbolákat, ellipsziseket vagy kört kapunk (kúpszelet).
2. A $\cos\alpha$ miatt a szög előjele nem számít.
3. Érdemes megemlíteni, hogy bizonyos esetekben nem csak egy szöget, hanem szögpárt is tudunk mérni. Ebben az esetben az irányok egy dimenziós egyeneseket alkotnak.

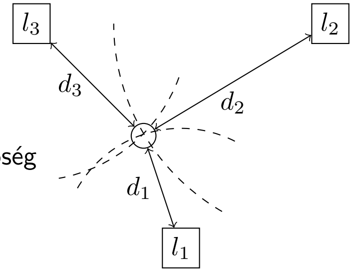
# Távolságmérés alapján

## Helybecslési technikák

- A távolságmérés a mérendő objektum és a horgonypontok közötti pont-pont távolságból határozza meg a helyet.
- A korábbi jelölésekkel az egyenletek:

$$| \mathbf{l} - \mathbf{p}_n | = d_n$$

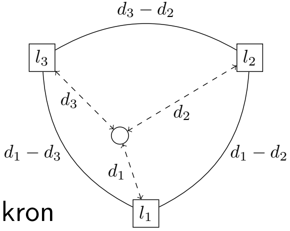
- Szintén nem lineáris egyenletrendszer
  - gömbökön elhelyezkedő pozíciók
- Technológiák
  - tipikusan rádiós megoldások időméréssel
  - ritka önmagában, inkább távolságkülönbség



# Távolságkülönbség mérés alapján

## Helybecslési technikák

- A mérés során két horgonypont közötti távolságkülönbséget tudjuk megmérni
- Ebből következően az egyenletek:
$$\mid \mathbf{l} - \mathbf{p}_i \mid - \mid \mathbf{l} - \mathbf{p}_j \mid = d_{i,j}$$
- $N$ darab horgonypont esetén $\binom{N}{2}$ egyenlet
- Síkon tekintve hiperbolákat kapunk
- Előnye, hogy időmérés esetén nem kell időszinkron
- Technológiák:
  - WiFi TDoA
  - GNSS



## Távolságkülönbség mérés alapján



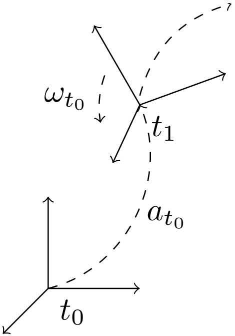
- A mérés során két horgonypont közötti távolságkülönbséget tudjuk megmérni
- Ebből következően az egyenletek:
  $$\mid \mathbf{l} - \mathbf{p}_i \mid - \mid \mathbf{l} - \mathbf{p}_j \mid = d_{i,j}$$
- $N$ darab horgonypont esetén $\binom{N}{2}$ egyenlet
- Síkon tekintve hiperbolákat kapunk
- Előnye, hogy időmérés esetén nem kell időszinkron
- Technológiák:
  - WiFi TDoA
  - GNSS

1. A távolságot tipikusan időméréssel valósítják meg. Ismerve a $c$ terjedési sebességet, a távolság $s = c\tau$, amennyiben $\tau$ a mért terjedési idő.
2. A terjedési idő méréséhez – amennyiben az nem körülfordulással, tehát véte után visszasugárzással történik – az adó és vevő között időszinkron szükséges. Távolságkülönbség mérése azonban időszinkron nélkül is megvalósítható.

# Inerciális odometria

## Helybecslési technikák

- Odometria $\rightarrow$ különböző szenzorok jelei alapján útvonal meghatározás
  - gyorsulásérzékelő
  - giroszkóp
- A gyorsulásérzékelő a *készülék* koordinátarendszerében megadja a gyorsulás irányát és mértékét
- A giroszkóp a forgási sebességet méri
- A két szenzor ismeretében a készülék pályája számítható
  - A zajok miatt a helyzet bizonytalansága egyre nő



# Inerciális odometria

## Helybecslési technikák

- Az inerciális odometria egyenletei folytonos időben (zaj és hibák nélkül)

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{l}}_t &= \mathbf{v}_t \\
\dot{\mathbf{v}}_t &= R(\mathbf{q}_t)\mathbf{a}_t + \mathbf{g}_t \\
\dot{\mathbf{q}}_t &= \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes \omega_t \\
\dot{\mathbf{g}}_t &= 0
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{l}_t$ jelöli a készülék helyét, $\mathbf{q}_t$ pedig a helyzetét, $R(\mathbf{q}_t)$ a kvaternióhoz tartozó forgatási mátrix
- $\mathbf{a}_t$ és $\omega_t$ a szenzorok $t$ időpillanatban érvényes értékei
- $\mathbf{g}_t$ a gravitációs vektor

## Inerciális odometria
Helybecslési technikák

- Az inerciális odometria egyenletei folytonos időben (zaj és hibák nélkül)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{l}}_t &= \mathbf{v}_t \\
\dot{\mathbf{v}}_t &= R(\mathbf{q}_t)\mathbf{a}_t + \mathbf{g}_t \\
\dot{\mathbf{q}}_t &= \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes \omega_t \\
\dot{\mathbf{g}}_t &= 0
\end{aligned}$$

- $\mathbf{l}_t$ jelöli a készülék helyét, $\mathbf{q}_t$ pedig a helyzetét, $R(\mathbf{q}_t)$ a kvaternióhoz tartozó forgatási mátrix
- $\mathbf{a}_t$ és $\omega_t$ a szenzorok $t$ időpillanatban érvényes értékei
- $\mathbf{g}_t$ a gravitációs vektor

1. A $\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes \omega_t$ sor a helyzet változását jelképezi. A kifejezés egy $\omega_t$ szögsebességű elfordulás (határértékben vett) kicsiny hatását írja le.

# Vizuális helymeghatározás

## Helybecslési technikák

- Kamerával és az általa rögzített képekkel történő helymeghatározás
  - A kamera a 3D teret leképezi 2D-re
- A vetítési egyenlet:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{X} = K\left[R|\mathbf{t}\right]\mathbf{X}$$

- $K$ a belső kameramátrix, $R$ az orientációs mátrix és $\mathbf{t}$ a helytől és orientációtól függő vektor
- $\mathbf{x}$ a kameraképen látható pont koordinátái, $\mathbf{X}$ a térbeli pont koordinátái
- Az $\mathbf{X}$ pontok lehetnek
  - előre ismertek kalibráció által $\rightarrow$ abszolút helymeghatározás
  - előre nem ismertek $\rightarrow$ visual odometry
- A későbbiekben részletesen bemutatjuk

# Referencia

- A képek a következő helyekről származnak:
  - Wikipedia
  - Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, Paul D. Groves