5. gyakorlat: Digitális alapsávi átvitel

O.5.1. A PAM jel spektrális viselkedése

PAM (Pulse Amplitude Modulation) jelnek az (1) kifejezéssel értelmezett jeleket nevezzük:

$$s_{PAM}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \, h(t - kT). \qquad (1)$$

A T időtartamot jelzési időnek, a $h(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ lényegében folytonos, többé-kevésbé korlátozott időtartamú függvényt elemi jelnek, a d_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ diszkrét értékkészletű sorozat elemeit amplitúdóknak nevezzük. Ha az elemi jel elég keskeny (keskenyebb, mint T), akkor (1) szemléletes értelmezése: a modulált jel T szélességű szakaszait, az időréseket az elemi jel d_k-val arányos magasságú változataival töltjük ki. Matematikailag (1) az elemi jel és az amplitúdók diszkrét sorozatának konvolúciója.

A d_k sorozat elemei gyakran 0 várható értékűek (néha nem!), értékük sokszor $\pm 1, \pm 3, \ldots$, értékészletük számossága rendszerint kettő valamely hatványa, így egy amplitúdó egy véges hosszú bitsorozat képviseletét látja el. Pl. négyszintű jelnél a $\pm 1, \pm 3$ értékű amplitúdók rendre a 00, 01, 10, 11 bitpárok megjelenítését végezhetik.

Az amplitúdók sorozatáról gyakran feltételezhető, hogy elemei statisztikailag függetlenek. Ha ez igaz, akkor a PAM jel spektrális viselkedését kizárólag az elemi jel határozza meg. Az elemi jelalakot az adószűrő-csatorna-vevőszűrő lineáris rendszer alakítja, így ennek spektruma

$$H(f) = c \cdot H_A(f) \cdot H_C(f) \cdot H_V(f).$$

(Ebben az összefüggésben c valójában egy érdektelen szorzótényező, a D/A átalakító konverziós tényezője, így a szűrők átviteli függvénye dimenziótlan.)

O.5.2. A szimbólumközti áthallásmentesség feltétele

Eddigi tanulmányaink során láthattuk, hogy az átviteli út lineáris torzításai (nemlineáris fázismenet, ill. aluláteresztő jellegű átviteli karakterisztika) impulzus-kiszélesedéshez, azaz diszperzióhoz vezet. Digitális átvitelnél ez a jelenség különösen kellemetlen, mivel a szomszédos időrések között áthallást okoz (ISI = Intersymbol Interference). A PAM jel megfejtése, kiértékelése időrésenként történik, a jelből az időrések közepe tájékán vett egyetlen minta alapján. Az ISI nehezíti a detekciót (rontja a jel-zaj viszonyt), ráadásul kedvezőtlen esetben önmagában is a vett minta hibás értelmezéséhez vezethet. (lásd P.7.5. példa) A szimbólumok közötti áthallás elkerülhető, ha az elemi jel hatása a szomszédos időrések mintavételi időpontjában zérus. Pontosabban: van egy olyan t_0 mintavételi időpont, hogy

$$h(t) = \begin{cases} h_0, & \text{ha} \quad t = t_0 \\ 0, & \text{ha} \quad t = t_0 + kT, \; k \neq 0 \\ \textit{tetszőleges}, & \textit{egyébként} \end{cases} \qquad (2)$$

Ekkor (1) alapján behelyettesítéssel is látható, hogy $s_{PAM}(t_0 + iT) = ... = d_i \cdot h_0$, valóban nem lesz szimbólumközti áthallás. A fenti feltétel tulajdonképpen az elemi jelből nyert $h_k = h(t_0 + kT)$, T-közű mintasorozatra tesz kikötést. A minták közül csak h_0 különbözik nullától, így a mintasorozat spektruma $H_s(f) = h_0 T$. A mintavett jelek spektrumáról tanultuk, hogy megadható az eredeti jel halmozott spektrumával:

$$H_s(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(f - k/T) \cdot e^{j2\pi(f-k/T)t_0} = h_0 T$$

Tehát minden olyan elemi jel, melynek spektruma kielégíti a fenti relációt (Nyquist kritérium), vagyis a jelzési idő reciprokával halmozott spektruma konstans, egyben kielégíti a (2) feltételt is, vagyis az átvitel ISI mentes lesz.

O.5.3. A zaj hatása

Az átviteli utat szinte mindig terheli valamilyen zaj. Mivel a hibavalószínűség a jel/zaj viszony monoton csökkenő függvénye (ld. P.7.4. példa), ezért célszerű vevőnket zajra is optimalizálni. Szélessávú, additív fehér zaj esetében a legjobb jel/zaj viszonyt abban az esetben kapjuk, ha a vevőszűrő karakterisztikája – valamely t_0 késleltetéstől és egy arányossági tényezőtől eltekintve - éppen komplex konjugáltja a bejövő jel spektrumának, amelyet – ha a csatorna torzításmentes - az adószűrő alakít ki:

$$H_V(f) = k \cdot H_A^*(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

Ha a csatorna zajának spektrális sűrűsége $N_0/2$, akkor a vevőszűrő kimenetén a zaj spektrális sűrűsége

$$s_v(f) = H_V(f) H_V^*(f) \cdot N_0/2 = k \cdot H_V(f) H_A(f) \cdot e^{j2\pi f t_0} \cdot N_0/2 = \hat{c} \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f t_0} \cdot N_0/2$$

vagyis egy arányossági tényező erejéig az elemi jel Fourier spektrumával lesz megegyező (itt most $\hat{c} = k/c$). A döntést zavaró zaj szórásnégyzete, teljesítménye pedig

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} s_v(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \cdot \hat{c} \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f t_0} df = \hat{c} \cdot h_0 \cdot N_0/2 .$$

A jel nagyságát pl. a leadott elemi jel energiájával minősíthetjük. Ez esetünkben

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |c \cdot H_A(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c \cdot c}{k} H_V(f) H_A(f) \cdot e^{j2\pi f t_0} df = \frac{1}{\hat{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi f t_0} df = \frac{h_0}{\hat{c}}$$

A hibavalószínűséget h_0 és σ - vagy négyzeteik - viszonya határozza meg. Ez a viszony most:

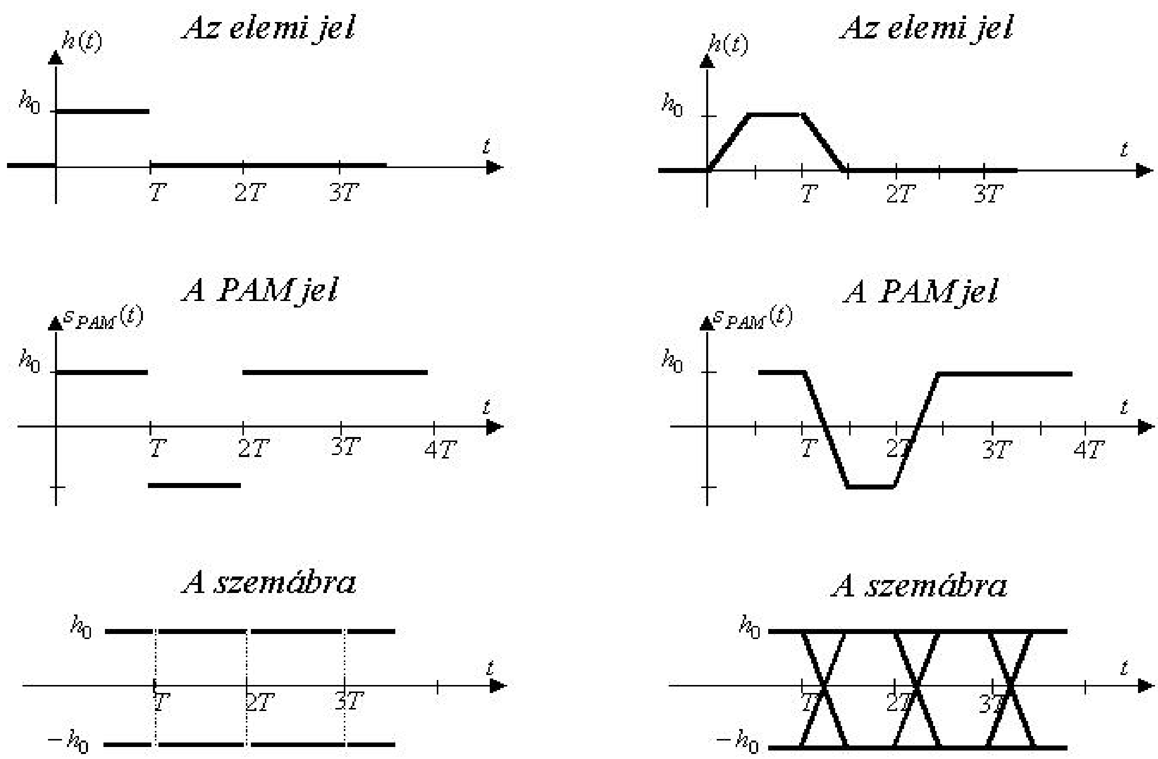
$$\frac{h_0^2}{\sigma^2} = \frac{h_0 \cdot h_0}{\hat{c} \cdot h_0 \cdot N_0/2} = \frac{2E}{N_0} .$$

Tanulság: az elemi jel energiája és a zaj spektrális sűrűsége a hibavalószínűség meghatározó tényezői. Kis teljesítménnyel is el lehet érni kis hibavalószínűséget, csak időt kell rá szánni, hiszen kicsiny elemi jelnek is lehet nagy az energiája, ha elég hosszan tart, azaz, ha T elég nagy.. Az elemi jel energiája ezen túlmenően meghatározza az adatjel teljesítményét is.

P.5.1. Szemábra vizsgálata

Rajzoljuk fel az ideális bináris NRZ jel elemi jelalakját, a ..,1,0,1,1,.. bitsorozathoz tartozó jelalakot, majd a szemábrát! Tegyük meg ugyanezt, ha a jelet diszperzió sújtotta és a jelalak oly módon torzult, hogy mind a csúcstól csúcsig fel- és lefutás, mind a csúcson maradás ideje $T/2$!

<u>Megoldás</u>:



P.5.2. A szimbólumközti áthallás elkerülése

Gondoljuk át, milyen jelzési sebességek esetén nincs szimbólumközti áthallás, ha az elemi jel spektruma

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{B} \cdot \left(1 - |f/B|\right), & \text{ha } |f| \le B \\ 0, & \textit{egyébként} \end{cases} \; !$$

Gondoljuk át azt is, mi a következménye annak, ha a jelzési sebesség kicsi az elemi jel sávszélességéhez képest!

<u>Megoldás:</u>

A megadott spektrumhoz tartozó időfüggvény is kitalálható, hiszen ez a háromszög egy feleszélességű "téglalap" önmagával alkotott konvolúciója. Az időfüggvény tehát:

$$h(t) = \left(\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt}\right)^2.$$

Tekintve, hogy ennek a függvénynek nullhelyei $1/B$ egész sokszorosainál vannak, a jelzési idő (az időrések szélessége) is $1/B$ sokszorosa lehet, s ekkor nincs szimbólumközti áthallás.

A frekvenciatartományi kép alapján is erre a következtetésre jutunk. Ha ugyanis a jelzési sebesség éppen B, az egymásra lapolódó eltolt háromszögek éppen konstansra egészítik ki egymást. Ha a jelzési sebesség B-nek tört része, akkor még e konstansokat is egymásra kell lapolni, persze az összeg ekkor is állandó marad.

Ez a kép ad módot a második kérdés tisztázására. Ha a jelzési sebesség kicsi, akkor sok eltolt spektrum lapolódik egymásra, s bármilyen is a szélessávú spektrum alakja, sok egymásra lapolódó szeletének összege *közel ugyanaz* a konstans lesz. Minél több szelet játszik szerepet, ezek annál keskenyebbek, annál inkább konstans az eredő. Ha pedig kicsi az eredményfüggvény ingadozása, akkor az azt jelenti, hogy kicsi a megmaradt szimbólumközti áthallás is.

P.5.3. Illesztett adó- és vevőszűrő karakterisztikájának meghatározása

Hogyan választaná meg a PAM rendszer adó- és vevőszűrőjét az előző feladatban megadott elemi jelalak elérése érdekében, ha a csatorna torzításmentes ($H_C(f) = 1$), de fehér zajjal terhelt?

<u>Megoldás:</u>

A legjobb vevőszűrő illeszkedik a vett jelhez, tehát $H_V(f) = k \cdot H_A^*(f)$. Ez a feltétel legegyszerűbben a

$$H_V(f) = H_A(f) = \sqrt{1 - |f \cdot T|}, \quad \text{ha} \quad |f| < 1/T$$

alakú tiszta valós karakterisztikájú szűrőkkel valósítható meg. (Most tehát a k arányossági tényező 1, az adó D/A átalakítójának c konverziós tényezője pedig T. Az egy másik kérdés, hogy ezek a szűrők a valóságban mennyire könnyen realizálhatók.)

P.5.4. Példa a hibavalószínűség számítására

Egy szimbólumközti áthallástól mentes bináris szinkron PAM jel mintái a vevőszűrő utáni ponton ±1.2 V értékűek. A vonali jelet szélessávú additív Gauss zaj zavarja, amely miatt a vevő döntő áramkörének bemenetén a jelmintákhoz nulla várható értékű, 0.3 V szórású, normális eloszlású zaj adódik. Határozzuk meg az átvitel hibavalószínüségét! Hogyan alakul a hibavalószínűség négy-, illetve nyolcszintű rendszer esetében, ha feltételezzük, hogy az egyes szintek előfordulási valószínűsége azonos? Hogyan változik a jelteljesítmény a szintek számának függvényében?

<u>Megoldás:</u>

A döntési küszöböt a névleges jelminták közének felére állítva kétszintű rendszernél hibázás akkor történik, ha a zaj n pillanatértéke túl nagy abszolut értékű és rossz irányú. Ha az m jelérték $\pm h_0$, akkor:

$$P_e = \mathbf{P}(n < -h_0, m = h_0) + \mathbf{P}(n > h_0, m = -h_0).$$

Mivel a zaj a hasznos jeltől független, ezért írhatjuk, hogy

$$P_e = \mathbf{P}(n < -h_0)\mathbf{P}(m = h_0) + \mathbf{P}(n > h_0)\mathbf{P}(m = -h_0).$$

Az itt szereplő $\mathbf{P}(n < -h_0)$ és $\mathbf{P}(n > h_0)$ valószínűségek az egységnyi szórású, nulla várható értékű normális eloszlás

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy$$

komplementer eloszlásfüggvénye segítségével adhatók meg:

$$\mathbf{P}(n < -h_0) = 1 - \Phi(-h_0/\sigma), \text{ és } \mathbf{P}(n > h_0) = \Phi(h_0/\sigma).$$

Mivel a nulla várható értékű normális eloszlás sűrűségfüggvénye páros függvény, ezek egyenlőek, s így az eredő hibavalószínűség:

$$P_e = \left[\mathbf{P}(m = h_0) + \mathbf{P}(m = -h_0)\right] \Phi(h_0/\sigma).$$

Felhasználva, hogy $\mathbf{P}(m = h_0) + \mathbf{P}(m = -h_0) = 1$, a kétszintű rendszer hibavalószínűségére az adódik, hogy

$$P_e = \Phi(h_0/\sigma) = \Phi(1.2/0.3) = 3.2 \cdot 10^{-5}.$$

Többszintű rendszerek esetében – a szintek számát (ez általában 2 valamilyen hatványa) L-lel jelölve – az egyes minták a $\pm h_0$, $\pm 3h_0$, $\pm 5h_0$,..$\pm(L-1)h_0$ értékeket vehetik fel. A szélső $m=\pm(L-1)h_0$ értékek esetében csak az ellentétes polaritású zaj képes hibát okozni, a többiek esetén mindkét irány fájdalmas lehet. A lehetőségeket számba véve, fetételezve, hogy a különböző szintek előfordulásának valószínűsége azonos ($1/L$), a hibavalószínűség:

$$P_e = 2\frac{L-1}{L}\Phi\left(\frac{h_0}{\sigma}\right)$$

A fenti képletből látható, hogy a négyszintű rendszer hibavalószínűsége 50%-kal, a nyolcszintűé pedig 75%-kal nagyobb, mint az öszevethető kétszintűé.

Vegyük észre, hogy a szintek számának növelésével a jelteljesítmény is növekszik. Négyszintű jel esetében az átlagteljesítmény $(1+3^2)/2 = 5$-szöröse, míg nyolcszintű jel esetében már $(1+3^2+5^2+7^2)/4 = 21$-szerese az összevethető kétszintűének. Ez azt jelenti, hogy a négyszintű rendszernél 7, a nyolcszintűnél pedig nagyjából 13 *dB*-lel kell nagyobb jel/zaj viszonyt biztosítani egy valamivel rosszabb hibaarány eléréséhez. A teljesítménynövekedés a szintek számával – nem meglepő módon – nagyjából négyzetes, L szintű jel esetében, az egyes szintek előfordulási valószínűségét azonosnak feltételezve, $(L^2-1)/3$-szoros. Lehet persze kisebb teljesítménnyel adni, ha azonban h_0 csökken, akkor a hibavalószínűség nő meg.

P.5.5. A szimbólumközti áthallás romboló hatása

Tételezzük fel, hogy az $m(.)$ elemi jel valamely mintavételi fázisban ugyan kielégíti Nyquist feltételét (azaz T közű mintái rendre $m_0 = 1, m_{\pm 1} = 0, m_{\pm 2} = 0, \ldots$), de a mintavételi fázis időzítési hiba következtében elcsúszik, és a meghatározó jelminták $m_0 = 0.99, m_{-1} = 0.1, m_{+1} = -0.1, m_{\pm 2} = 0, \ldots$értékűek lesznek. Becsüljük meg a hibavalószínűséget meghatározó jel-zaj viszony leromlását 2, 4 és 8 szintű rendszerben!

Megoldás:

Feltételezzük, hogy a 2, 4 és 8 szintű rendszerben a jelamplitúdók rendre ±1, ±1 és ±3 valamint ±1,±3, ±5 és ±7 értékűek. Mivel a jelamplitúdók közötti távolság azonos, azonos zajban e rendszerek hibavalószínűsége is összevethető (bár enyhén különböző, miért is?). Akkor, amikor nincs szimbólumközti áthallás, a hibavalószínűséget meghatározó jel-zaj arány 1/σ, ahol σ a zajminták szórása. Az időzítési hiba esetén az adatjel mintái elmosódnak, az aktuális időrés amplitúdója mellett ±0.1 súlytényezővel a szomszédos időrések amplitúdói is "látszanak". Legrosszabb esetben a szomszédos amplitúdók abszolut értéke maximális, előjelük pedig olyan, hogy hatásuk ugyanabba az irányba tolja el a vett minta értékét. Az eltérő tartalmat hordozó jelminták távolsága így lecsökken, a fél-távolság $0.99-d_{\max}(0.1+0.1)$ lesz. A zaj szórását a dolog nem érinti, ezért a jel-zaj viszony csökkenése rendre 0.79, 0.39-szeres. 8 szintű rendszerben nagy baj van: $7\cdot 0.2>0.99$. Ez azt jelenti, hogy még zaj nélkül is hibás olykor a döntés.

Tanulság: a szimbólumközti áthallás mindig gondot jelent, de ez a gond többszintű rendszerben hatványozottan jelentkezik.

P.5.6. Példa a szimbólumközti áthallás finomszerkezetére

Egy szinkron PAM rendszerben a szimbólumközti áthallást az eltorzult elemi jel $m_0=1.00,\ m_{-1}=0.1,\ m_{+1}=-0.15,\ m_{\pm 2}=0,\ldots$mintái jellemzik. Milyen értékeket vehet fel a *k*-adik időrésből vett zajmentes jelminta, ha az adás kétszintű, illetve négyszintű? Állapítsa meg, mely értékeknek van döntő szerepe a hibavalószínűség meghatározásában!

Megoldás:

A zajmentes jelminták:

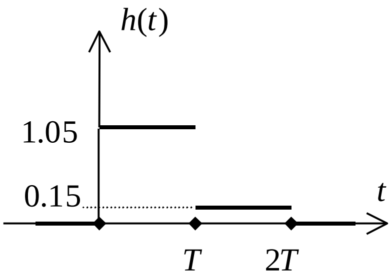
$$s_{k-0}=-0.15\cdot d_{k-1}+1.00\cdot d_{k-0}+0.1\cdot d_{k+1}$$

Kétszintű esetben a három szomszédos adat összesen nyolcféle lehet. Ha a középső adat értéke 1, akkor a minták rendre: 1.25, 1.05, 0.95, 0.75. A másik négyes nullára szimmetrikusan képződik: -1.25, -1.05, -0.95, -0.75.

Négyszintű jelnél az adatok értéke ±1 és ±3. Ha a középső adat éppen 3, akkor körülötte 16 féle érték állhat elő, ezek egyike-másika elfajuló lehet, amennyiben esetleg különböző szomszédos értékpárok is okozhatnak azonos értékű eltolódást. A legnagyobb értékeltolódást érdemes számba venni. Ha mindkét szomszéd maximális, azaz 3-as abszolut értékű, s szerencsétlenül azonos irányba hatnak, akkor a maximális értékeltolódás $3\cdot 0.15+3\cdot 0.1=0.75$. Így tehát 3-as értékű középső adat hatására a 2.25 és a 3.75 közötti mintaértékek jöhetnek létre. Az 1 értékű adat hatására hasonlóképpen 0.25 és 1.75 közötti minták keletkezhetnek. Negatív oldalon hasonló a helyzet.

G.5.1. Gyakorló feladat

Egy T jelzési idejű, bináris $(d_k = \pm 1)$ alapsávi PAM rendszer elemi jele az alábbi ábrán látható.



a) Rajzolja fel az alapsávi PAM jelet, ha az átvinni kívánt bitsorozat …-1-0-1-1-1-0-…, és az 1-et +1, a 0-t pedig –1 értékű amplitúdó (d_k) jeleníti meg!

b) Keletkezik-e itt szimbólumközti áthallás, ha a mintavétel fázisa $t_0 = T/4$?

c) Milyen értékű mintákat szolgáltathat a vevőkészülék mintavevője?

d) Rajzolja fel a vett jel szemábráját!

e) Alkalmas-e ez az elemi jel négyszintű rendszer üzemeltetésére?

f) Alkalmas-e ez az elemi jel nyolcszintű rendszer üzemeltetésére?

G.5.2. Gyakorló feladat

Egy T jelzési idejű, bináris $(d_k = \pm 1)$ alapsávi PAM rendszer elemi jelének spektrumát az alábbi képlet adja meg.

$$H(f) = \begin{cases} h_0 T \cdot \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} fT\right) & ha\ |f| < \dfrac{1}{T} \\ 0 & egyébként \end{cases}$$

a) Rajzolja fel léptékhelyesen ezt a függvényt!

b) Vizsgálja meg és nyilatkozzon, elkerülhető-e ebben a rendszerben a szimbólumközti áthallás?

c) Milyen lehet ebben a rendszerben a vevőszűrő átviteli függvénye? (Feltehető, hogy rendszerünket szélessávú additív zajra optimalizálták.) Rajzolja fel léptékhelyesen a vevőszűrő átviteli függvényét!

d) Az adó jelét egy 1200 Hz határfrekvenciájú aluláteresztő szűrővel szűrjük. Okoz-e várhatóan ez a szűrés számottevő szimbólumközti áthallást, ha a jelzési idő 833 μs?

G.5.3. Gyakorló feladat

Egy T jelzési idejű, bináris $(d_k = \pm 1)$ alapsávi PAM rendszer elemi jelének időfüggvényét az alábbi képlet adja meg.

$$h(t) = \begin{cases} h_0 \cdot \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{t-T}{T}\right) & ha\ t \in (0, 2T) \\ 0 & egyébként \end{cases}$$

a) Rajzolja fel léptékhelyesen ezt a függvényt!

b) Vizsgálja meg és nyilatkozzon, elkerülhető-e ebben a rendszerben a szimbólumközti áthallás! Hogyan választaná meg a mintavételi időpontokat?

c) Milyen értékeket vehetnek fel a PAM jel mintái a $t_k = (1.1 + k) \cdot T$ időpontokban (azaz, ha $\Delta t_0 = 0.1 \cdot T$ mértékű időzítési hiba lép fel)?

d) Érdemes-e ezen a rendszeren négyszintű átvitellel próbálkozni? És nyolcszintűvel?

e) Hogyan befolyásolja a mintavétel $\Delta t_0 = 0.1 \cdot T$ mértékű időzítési hibája a **d)** kérdésre adott válaszait?