0. gyakorlat

1. Példa: Határozzuk meg az A amplitúdójú, f_0 frekvenciájú szinuszjel, illetve szimmetrikus négyszögjel csúcstényezőjét!

Megoldás:

A csúcstényező a csúcsérték (ha egyáltalán létezik!) és az effektív érték (a négyzet átlagából vont négyzetgyök, a jellel azonos teljesítményű egyenszint értéke) hányadosa. A csúcsérték mindkét jelnél A, az effektív érték rendre $A^2/2$, illetve A^2 négyzetgyöke. A csúcstényező tehát a szinuszjelre $\sqrt{2}$, négyszögjelre 1.

2. Példa: Határozzuk meg két, egyenként A amplitúdójú, f_1, illetve f_2 frekvenciájú szinuszos jel összegének a csúcstényezőjét!

Megoldás:

A két szinuszjel összegének csúcsértéke *általában* $2A$ (csak kivételes frekvenciapárok és kezdõfázisok esetén állhat elő az a sajátos helyzet, amikor ez nem teljesül), teljesítménye azonban A^2. Így a csúcstényező *általában* 2.

3. Példa: Határozzuk meg az alábbi két jelnek a csúcstényezõjét!

$$x_1(t) = A\cos(2\pi \cdot f_0 t) + A\cos(2\pi \cdot 2 f_0 t) + A\cos(2\pi \cdot 3 f_0 t)$$
$$x_2(t) = A\cos(2\pi \cdot f_0 t) + A\sin(2\pi \cdot 2 f_0 t) + A\cos(2\pi \cdot 3 f_0 t)$$

Megoldás:

A két jel teljesítménye azonos, effektív értékük $A\sqrt{3/2}$. A csúcsértékük különböző, az első jelé nyilván $3A$, a másodikét nem is olyan könnyű meghatározni (pl. kalkulátor nélkül). Egy lehetőség a

$$x_2(t) = A\sin(2\pi \cdot 2 f_0 t) + 2 \cdot A\cos(2\pi \cdot \frac{3-1}{2} f_0 t)\cos(2\pi \cdot \frac{3+1}{2} f_0 t)$$

átalakítás, amelyből

$$|x_2(t)| \le \sqrt{A^2 + 4A^2\cos^2(2\pi \cdot f_0 t)} \le A\sqrt{5}$$

következik. Végeredményben az első jel csúcstényezője $\sqrt{6}$, a másodiké pedig kisebb, mint $\sqrt{10/3}$.

Megjegyzések:

1. A nagy csúcstényezőjű jelet nem szeretjük, mert "túlterheli" az elektronikus rendszerelemeket, arra kényszerít, hogy túlméretezzük őket.

2. Ha egy jel harmonikusokban "gazdag", ettől még a csúcstényezője lehet viszonylag kicsi, de ez az összetevők fázisaitól függ. Van szabványos mérőjel, (hangfrekvenciás csatornák átviteli függvényének mérésére használják), amely 38 darab azonos amplitúdójú szinuszjel összege, ($f_i = i \cdot 100 Hz,\quad i = 1, 2, ..38,$) de a

csúcstényezõje alig 3. E szabványos, ún. MTTS (Multi Tone Test Signal) jel összetevőinek fázisait a szabvány táblázatban közli.

4. Példa: Határozzuk meg az ún. Gauss impulzus Fourier transzformáltját!

Megoldás:

Definiáljuk a Gauss impulzust a következőképpen:

$$x(t) = x_0 \cdot \exp(-\frac{t^2}{2T^2}) \ !$$

Alapismeretként leszögezzük, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)dx = 1 .$$

Az időfüggvény Fourier transzformáltja:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right)\exp\left(-j2\pi ft\right)dt \ .$$

Az exponenseket összeadjuk és az összeget teljes négyzetté egészítjük ki:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0 \exp\left(-\frac{t^2 + j2\pi f\cdot 2T^2\cdot t + (j\pi f\cdot 2T^2)^2 - (j\pi f\cdot 2T^2)^2}{2T^2}\right)dt$$

Kiemelések és kiegészítések után:

$$X(f) = x_0\sqrt{2\pi}T\cdot\exp\left(\frac{(T^2 j2\pi f)^2}{2T^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}T}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(t+T^2 j2\pi f)^2}{2T^2}\right)dt$$

Felismerve, hogy a kapott kifejezés második része éppen 1, az eredmény:

$$X(f) = x_0\sqrt{2\pi}T\cdot\exp\left(-\frac{(2\pi T)^2 f^2}{2}\right)\cdot .$$

Már csak egy kis szépítgetésre van szükség, ehhez érdemes bevezetni a

$$B = \frac{1}{2\pi T}$$

sávszélesség jellegű paramétert. Ezzel:

$$X(f) = x_0\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}B}\exp\left(-\frac{f^2}{2B^2}\right).$$

Az eredmény határozottan csinos: Gauss impulzus spektruma ugyancsak "Gaussos". Kis csalás a levezetésben, hogy a komplex értékű integrandust egyik-másik lépésben valósként kezeljük, de ez végül is hibát nem okoz.

5. Példa: Gauss impulzust Gauss aluláteresztővel szűrünk. Vizsgáljuk meg a szűrés eredményét!

Megoldás:

A Gauss aluláteresztő átviteli függvénye:

$$H(f)=\exp\left(-\frac{f^2}{2B_H^2}\right).$$

A szűrő kimenő jelének Fourier transzformáltja:

$$Y(f)=X(f)\cdot H(f)=x_0\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}B}\exp\left(-\frac{f^2}{2B^2}\right)\cdot\exp\left(-\frac{f^2}{2B_H^2}\right).$$

A két exponenciális függvény szorzata is exponenciális:

$$Y(f)=X(f)\cdot H(f)=x_0\frac{B_e}{B}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}B_e}\exp\left(-\frac{f^2}{2B_e^2}\right),$$

ahol a B_e eredő sávszélesség az

$$\frac{1}{B_e^2}=\frac{1}{B_H^2}+\frac{1}{B^2}$$

összegzési szabállyal számolandó. Tanulság tehát, hogy a kimenő jel is Gauss impulzus, csak a sávszélessége és a nagysága változik.

Megjegyzés: Gyakori probléma, mit mondhatunk arról az impulzusról, amelyet egymás után több, nem túl jól specifikált szűrő hatás ér. Kézenfekvõ modell ilyen esetekben a Gauss impulzus, illetve a Gauss aluláteresztő. Az, hogy e modellek tűrhetően működnek a gyakorlatban, összefügg e függvény (itt nem tárgyalt) bizonyos szélsőérték-tulajdonságával.

6. Példa: Hasonlítsuk össze az „ideális” és az „elsőfokú” aluláteresztő szűrőket!

Megoldás:

A szóban forgó szűrők átviteli függvényei:

B sávszélességű ideális szűrő	B sávszélességű elsőfokú szűrő
$H(f)=1\cdot e^{-j2\pi fT}$, *ha* $\lvert f\rvert<B$ *és* 0 *egyébként* T a szűrő késleltetése	$H(f)=\dfrac{1}{1+j\cdot f/B}$

A másik fontos jellemző, a súlyfüggvény az átviteli függvény inverz Fourier transzformáltja. Az ideális szűrőre:

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(f)\cdot e^{j2\pi ft}df=\int_{-B}^{B}1\cdot e^{-j2\pi fT}\cdot e^{j2\pi ft}df=\left.\frac{e^{j2\pi f(t-T)}}{j2\pi(t-T)}\right|_{-B}^{B}=\frac{2\sin(2\pi B(t-T))}{2\pi(t-T)}.$$

Az elsőfokú aluláteresztőnél én csak arra emlékszem, hogy a súlyfüggvény belépő és lecsengő exponenciális függvény. Ez elég ismeret, hiszen akkor

$$H(f)=\int_0^{\infty}a\cdot e^{-bt}\cdot e^{-j2\pi ft}dt=a\cdot\int_0^{\infty}e^{-(b+j2\pi f)t)}dt=a\cdot\left.\frac{-e^{-(b+j2\pi f)t}}{b+j2\pi f}\right|_0^{\infty}=\frac{a/b}{1+j\cdot 2\pi f/b}$$

Látszik, hogy a súlyfüggvény paraméterei: $a=b=2\pi B$.

Megjegyzés: elsőfokú aluláteresztőt pl. RC taggal (integráló tag) lehet megvalósítani. Érdemes minden felbukkanó függvényt felrajzolni. Meg lehet említeni, hogy az ideális aluláteresztő nem kauzális (hiszen a súlyfüggvénye nem belépő függvény).