

Játékelmélet és alkalmazásai

Dr. Szűcs Gábor

BME Távközlési és Médiainformatikai Tanszék

Játékelmélet alapfogalmai

- Játékosok
- „Stratégia”
- Kifizetőfüggvény
- Játékszabály

Történeti áttekintés

- **Neumann János:**
minimax tétel
- **John Nash:**
nem kooperatív játékelmélet
- **Harsányi János:**
nem teljes információs játékok
- **Lloyd S. Shapley:**
stabil elosztás elmélete

Játékelmélet 2 ága

Nemkooperatív játékok

- Versengés
- Kommunikáció nélküli

Példák:

- kártyajátékok
- táblás játékok

Kooperatív játékok

- Versengés mellett kooperáció is
- Kommunikációs lehetőség

Példák:

- csapatjáték

Egyszerű dilemmák

- fogolydilemma
- többszemélyes fogolydilemma: közlegelők problémája
- többmenetes fogolydilemma

	Vall		Tagad	
Vall	5	5	0	10
Tagad	10	0	1	1

Nemkooperatív játékelmélet

- Teljes vs. nem teljes információs
- Zérusösszegű vs. nem zérusösszegű
- Két vs. több játékos

Nemkooperatív mátrixjátékok

$$\underline{\underline{A_1}} + \underline{\underline{A_2}} = \underline{\underline{0}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_2}} = -\underline{\underline{A_1}}$$

	1. stratégia	2. stratégia		n. stratégia	
1. stratégia	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	
2. stratégia	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	
...			...		
m. stratégia	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	

a_{ij} az első játékos nyereményei, ahol vízszintes sorokban az első játékos, függőleges oszlopokban a második játékos stratégiái láthatók

Nemkooperatív mátrixjátékok (1.)

$$\underline{\underline{A_1}} + \underline{\underline{A_2}} = \underline{\underline{0}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_2}} = -\underline{\underline{A_1}}$$

	1. stratégia	2. stratégia		n. stratégia	
1. stratégia	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$b_1 = \min \{a_{1j}\}$
2. stratégia	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$b_2 = \min \{a_{2j}\}$
...			...		
m. stratégia	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$b_m = \min \{a_{mj}\}$
					$\max \{b_i\} =$ $\max \{\min \{a_{ij}\}\}$

a_{ij} az első játékos nyereményei, ahol vízszintes sorokban az első játékos, függőleges oszlopokban a második játékos stratégiái láthatók

Nemkooperatív mátrixjátékok (2.)

$$\underline{\underline{A_1}} + \underline{\underline{A_2}} = \underline{\underline{0}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_2}} = -\underline{\underline{A_1}}$$

	1. stratégia	2. stratégia		n. stratégia	
1. stratégia	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	
2. stratégia	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	
...			...		
m. stratégia	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	
	$c_1 = \max\{a_{i1}\}$	$c_2 = \max\{a_{i2}\}$	...	$c_n = \max\{a_{in}\}$	$\min \{c_j\} = \min \{\max \{a_{ij}\}\}$

a_{ij} az első játékos nyereményei, ahol vízszintes sorokban az első játékos, függőleges oszlopokban a második játékos stratégiái láthatók

Nyeregpont, meghatározott játék

nyeregpont létezésének feltétele

$$\max_{i=1}^m \{ \min_{j=1}^n \{ a_{ij} \} \} = \min_{j=1}^n \{ \max_{i=1}^m \{ a_{ij} \} \}$$

az 1. számú játékos **optimális stratégiáját** i^0 -vel, a 2. számúét pedig j^0 -vel jelölik. Itt a kifizető-függvény értéke lesz a **játék értéke**: $v = a_{i^0 j^0}$, és a (i^0, j^0, v) rendezett hármas a **játék megoldása**.

Ekvivalencia és felcserélhetőség

- **Ekvivalencia:** Ha több nyeregpontja van egy mátrixjátéknak - pl. (i^0, j^0) és (i^1, j^1) -, akkor az ezekhez tartozó kifizetőfüggvény értékek megegyeznek, azaz: $a_{i^0 j^0} = a_{i^1 j^1}$
- **Felcserélhetőség:** továbbá a (i^0, j^1) és (i^1, j^0) pontok szintén nyeregpontok.

Játékelmélet alaptétele

- Tiszta – kevert stratégiák
- **Játékelmélet alaptétele:** minden kevert bővítésű mátrixjátéknak van megoldása.

Nemkooperatív bimátrixjátékok

- nem zérusösszegű játéknál a két mátrix teljesen független és eltérhet egymástól: **bimátrixjáték**.
- Kevert játék esetén a két játékos nyereségfüggvénye:

$$E_1 = p^T \cdot A \cdot q \quad E_2 = p^T \cdot B \cdot q$$

ahol p és q a két játékos stratégiáinak eloszlási vektora

Nash-féle egyensúlypont

Egy (p^0, q^0) stratégiapárost **egyensúlypontnak** (Nash-féle egyensúlypontnak) nevezzük, ha:

$$E_1(p^0, q^0) \geq E_1(p, q^0) \quad \forall p$$

$$E_2(p^0, q^0) \geq E_2(p^0, q) \quad \forall q$$

Megoldhatóság

Egy nemkooperatív bimátrixjátékot (Nash-féle értelemben) **megoldható**nak nevezzük, ha minden egyensúlyi pontja rendelkezik az **ekvivalencia** és a **felcserélhetőség** tulajdonságokkal.

Ekkor a játék értéke az $u^0 = E_1(p^0, q^0)$, $v^0 = E_2(p^0, q^0)$ rendezett számpár, és a játék megoldása a (p^0, q^0, u^0, v^0) rendezett négyes.

Dominancia

Egy bimátrixjáték (p^1, q^1) stratégiapárja **dominálja** a (p^2, q^2) stratégiapárt, ha

$$E_1(p^1, q^1) \geq E_1(p^2, q^2)$$

$$E_2(p^1, q^1) \geq E_2(p^2, q^2)$$

Szigorúan megoldható

Egy bimátrixjátékot **szigorúan megoldható**nak nevezzük, ha megoldható és van domináns egyensúlyi pontja.

Probléma: mi van, ha a játéknak van egyensúlyi pontja, de van egy olyan pont is, amely az egyensúlyi pontot dominálja?

Kooperatív játékelmélet

- A játékosok halmaza: $N = \{1, \dots, n\}$.
- A játékosok egy $S \subseteq N$ halmazát koalíciónak hívjuk, speciálisan:
 - N a nagykoalíció,
 - $\emptyset$ az üres koalíció.

Koalíciós függvény

- **Koalíciós függvény: $v(S)$**
az elérhető maximumokat tartalmazza.
- Egy (N, v) játékban az $x = (x_1, \dots, x_n)$ kifizetésvektor

– **elérhető** az S koalíció számára, ha

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$$

– **elfogadható** az S koalíció számára, ha

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

Elosztás, mag

Azt mondjuk, hogy az (N, v) játékban az $x = (x_1, \dots, x_n)$ kifizetés-vektor

•**szétosztás**, ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

•**elosztás**, ha ez olyan szétosztás, melyre minden i -re

$$x_i \geq v(\{x_i\})$$

•**mag-elosztás**, ha ez olyan szétosztás, melyre minden S -re $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$

Shapley-érték

Rögzített N játékos-halmaz mellett, tetszőleges $v \in G^N$ játékban az i játékos **Shapley-értéke** alatt

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{|S|!(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!} (v(S \cup i) - v(S))$$

számot értjük.

A **Shapley-érték** a játékosoknak megadja az általuk egyedül is elérhető kifizetést és egyenlő mértékben osztja szét a közösen elérhető többletet.

Frekvenciaárverés

A licitek száma alapján

- egyszeri (zárt borítékos) árverés
- dinamikus (nyílt) árverés

Megvételre kínált tárgyak száma alapján

- egy egységes árverés
- több egységes árverés