Helymeghatározás alapjai – gyakorlat

Hollósi Gergely
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék

2016. október 4.

1. Kalman-szűrő

A lineáris Kalman-szűrő az alábbi állapotegyenlettel dolgozik:

$$\begin{aligned} x_k &= A_{k-1}x_{k-1} + q_{k-1} \qquad & q_{k-1} &\sim N(0, Q_{k-1}) \\ z_k &= H_k x_k + r_k & r_k &\sim N(0, R_k) \end{aligned}$$

Az állapotegyenlet megoldása a predikciós lépésből és a frissítési lépésből áll.

$$\begin{aligned} m_k^- &= A_{k-1}m_{k-1} \\ P_k^- &= A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1} \\ \\ v_k &= z_k - H_k m_k^- \\ S_k &= H_k P_k^- H_k^T + R_k \\ K_k &= P_k^- H_k^T S_k^{-1} \\ m_k &= m_k^- + K_k v_k \\ P_k &= P_k^- - K_k S_k K_k^T \end{aligned} \tag{1}$$

2. Kiterjesztett Kalman-szűrő

A kiterjesztett Kalman-szűrő nemlineáris modell becslését teszi lehetővé:

$$\begin{aligned} x_k &= f(x_{k-1}) + q_{k-1} \qquad & q_{k-1} &\sim N(0, Q_{k-1}) \\ z_k &= h(x_k) + r_k & r_k &\sim N(0, R_k) \end{aligned}$$

A predikciós és frissítési lépés:

$$
\begin{aligned}
m_k^- &= f(m_{k-1}) \\
P_k^- &= F_x(m_{k-1})P_{k-1}F_x^T(m_{k-1}) + Q_{k-1} \\
\\
v_k &= z_k - h(m_k^-) \\
S_k &= H_x(m_k^-)P_k^- H_x^T(m_k^-) + R_k \\
K_k &= P_k^- H_x^T(m_k^-)S_k^{-1} \\
m_k &= m_k^- + K_k v_k \\
P_k &= P_k^- - K_k S_k K_k^T
\end{aligned}
\tag{2}
$$

3. Feladatok

Példa Legyen egy három dimenziós forgatási mátrix

$$
\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.5 & 0.5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}
$$

Határozzuk meg a forgatás tengelyét és szögét!

Megoldás Egy forgatási mátrix tengelye a forgatás során nem változik, tehát az a forgatás sajátvektora, valamint a hozzá tartozó sajátérték $\lambda = 1$. Tehát keressük az a $\mathbf{v}$ vektort, amelyre:

$$
(\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.5 & -0.5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0
$$

A középső sor megfelelő skalárszorosát kivonva az első és utolsó sorból, kapjuk, hogy

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Nyilvánvaló, hogy a tengely a $\mathbf{v} = [1, 1, 0]^T$ vektorral párhuzamos, origón áthaladó egyenes. A szög megállapításához válasszunk egy erre merőleges vektort, például az $\mathbf{a} = [0, 0, 1]$ vektort! Könnyű észrevenni, hogy $\mathbf{Ra} \perp \mathbf{a}$, így a forgatás szöge 90 fok.

Példa Forgassuk el a $\mathbf{p} = [1, 2, 1]$ vektort a $\mathbf{u} = [1, 1, 1]$ tengely körül 30 fokkal! Oldjuk meg a feladatot kvaterniók és a Rodrigues formula segítségével is!

Megoldás

```
u=[1,1,1];
p=[1,2,1];
a=30;

u=u/norm(u);
q=quaternion(cosd(a/2),u(1)*sind(a/2),u(2)*sind(a/2),u(3)*sind(a/2));
v=quaternion(0,p(1),p(2),p(3));
pvQ=q*v*inv(q);

K=[0 -u(3) u(2)
u(3) 0 -u(1)
-u(2) u(1) 0];
R=eye(3)+sind(30)*K+(1-cosd(30))*K*K;
pvRodr=R*p';
```

Példa Tegyük fel, hogy egy klasszikus, kétdimenziós távolságmérésen alapuló helymeghatározási rendszerünk létezik. A rendszer adatai és a felhasználó adatai megtalálhatók a mellékelt Octave fájlokban. Határozza meg a felhasználó helyzetét Newton-Gauss iteráció, Kalman-szűrő és RANSAC algoritmus segítségével!

Megoldás A mérési modell alapja a távolságmérés a felhasználó helyzete ($\mathbf{l}(x, y)$) és a horgonypontok ($\mathbf{p}_i(x_i, y_i)$) között, amelynek az alapegyenlete

$$d_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

A mérési modell deriváltja:

$$\frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}$$
$$\frac{\partial d_i}{\partial y} = \frac{y - y_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}$$

A Newton-Gauss iteráció: $\mathbf{l}_{n+1} = \mathbf{l}_n - (J^T J)^{-1} J^T (f(\mathbf{l}_n) - \mathbf{d})$
