

1. gyakorlat: Mintavételezés, kvantálás

O.1.1. Jel visszaállítása egyenközű mintáinak sorozatából

Impulzusüzemben T időnként működtetett D/A átalakító és $h(\cdot)$ súlyfüggvényű szűrő segítségével az $x_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ sorozatból az

$$\hat{x}(t) = T \cdot \sum_k x_k \cdot h(t - kT)$$

jel állítható elő. E jel Fourier transzformáltja létezik, ha pl. a sorozat abszolút összegezzhető, és ekkor:

$$\hat{X}(f) = T \cdot H(f) \cdot X_p(f),$$

ahol az

$$X_p(f) = \sum_k x_k \cdot e^{-j2\pi k f T}$$

függvényt a (minta)sorozat spektrumának nevezzük. Ha a jel előállításához felhasznált sorozat elemei az $x(\cdot)$ analóg jel T között ($f_s = 1/T$ gyakoriságú, frekvenciájú) mintái, azaz

$$x_k = x(kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

akkor az $x_k = x(kT), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ mintasorozat spektruma kifejezhető az analóg jel Fourier transzformáltjával, az analóg jel spektrumával:

$$X_p(f) = \frac{1}{T} \cdot \sum_i X\left(f - i \cdot \frac{1}{T}\right) = f_s \cdot \sum_i X(f - i \cdot f_s).$$

T reciproka a minták gyakorisága, a mintavételi frekvencia. Látható, hogy ekkor a D/A átalakítóval és szűrővel előállított jel spektruma:

$$\hat{X}(f) = H(f) \cdot \sum_i X(f - i \cdot f_s).$$

Nevezzük F sávúnak azokat a jeleket, amelyek az F sávon kívül nem tartalmaznak spektrális komponenseket! Ezekre a jelekre tehát

$$X(f) = 0, \text{ ha } f \notin F.$$

Ha $F = (-B, B)$, akkor B -re sávhatárolt jelekről beszélünk.

Az azonos F sávú jelek jól megválasztott sűrűségű mintáikból ugyanazzal a rendszerrel (elvileg) hibamentesen visszaállíthatóak. Ha ugyanis a mintavételi frekvencia olyan, hogy

$$\forall i \neq 0 - r a \quad X(f - i \cdot f_s) = 0, \text{ ha } f \in F, \quad (*)$$

(azaz a sorozat spektruma átlapolásmentes) és a visszaállító szűrő átviteli függvénye:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & \text{ha } f \in F \\ 0, & \text{ha } f \notin F \end{cases}$$

akkor

$$\sum_k X(f - k \cdot f_s) = X(f), \text{ ha } f \in F$$

lévén $\hat{X}(f) = X(f)$ teljesül, minden frekvenciára. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a rendszer kimeneti jele ugyanaz, mint a bemeneti jel, tekintet nélkül a sávon belüli komponensek nagyság és fázisviszonyaira. Jellegzetes példaként a B sávra határolt jeleket szokták emlegetni, ezeknél a (*) feltétel az $f_s \geq 2B$ választással biztosítható.

O.1.2. Kvantálás, kvantálási zaj

Az analóg jel mintáinak értékéről az A/D átalakító rendszerint azonos hosszúságú bináris kódszavak formájában ad tájékoztatást. Egyenletes lépcsőzésű kvantálásnál például az n bites kódszó megadja, hogy a minta értéke egy referenciaként szolgáló egység (kvantálási lépcső, Δ) hányszorosához van a legközelebb. A minta értékének előállítására, reprodukciójára a kódszó alapján történik, s így a D/A átalakító nem x_k , hanem $\hat{x}_k = x_k + \varepsilon_k$ magasságú impulzusokat szolgáltat. ε_k egyaránt lehet negatív és pozitív, de abszolút értéke legfeljebb $\Delta/2$, e tartományon belül eloszlását egyenletesnek tekintjük. Várható értéke (átlagértéke) így zérus, a szórásnégyzete pedig $\Delta^2/12$. Ez az érték független attól, mekkora is az ábrázolandó minta értéke. Ugyanakkor az is igaz, hogy a korlátozott szóhosszúság miatt a viszonylag pontosan ábrázolható minták nem lehetnek akármilyen nagyok. A jel csúcstól csúcsig vett értéke legfeljebb

$$U_{pp} \leq \Delta \cdot 2^n,$$

azaz legfeljebb félekkora, U_p amplitúdójú szinuszos jel mintái ábrázolhatóak Δ pontossággal.

A kvantálási hibákból származó zaj végső soron azt eredményezi, hogy a visszaállított analóg jel eltér az eredetitől:

$$\hat{x}(t) = x(t) + \varepsilon(t),$$

s itt $\varepsilon(t)$ azt az analóg jelet jelenti, amely az ε_k minták hatására keletkezik a visszaállító szűrő kimenetén. Az efféle hosszan tartó jelek is különféle frekvenciájú szinuszos-koszinuszos komponensekből állanak, noha Fourier integrál formájában nem írhatók fel. A különféle frekvenciájú szinuszos komponensek intenzitása ekkor is jellemezhető egy frekvenciafüggvénnyel, ez az ún. kétoldalas teljesítménysűrűség, másként spektrális sűrűségfüggvény. E függvény integrálja egy frekvenciasávra éppen a sávba eső szinuszos és koszinuszos komponensek összteljesítményét adja meg. A kvantálásból származó zajjel spektrális sűrűségfüggvénye:

$$s_\varepsilon(f) = \frac{1}{f_s} \cdot \frac{\Delta^2}{12} \cdot |H(f)|^2.$$

(A mintavételi frekvencia szerepét érdemes átgondolni. A D/A átalakító szolgáltatott impulzusok magassága T -vel, energiája $T^2 = 1/f_s^2$ -el arányos, a jel teljesítménye azonban függ az impulzusok sűrűségétől is, s ez a teljesítményt éppen f_s arányában növeli meg.) A kvantálási zaj összteljesítménye a visszaállító szűrő átviteli függvényének ismeretében a teljes frekvenciatartományra vett integrálással meghatározható. A visszaállított jel minőségét gyakran a hasznos jel és a mellette fellépő zaj teljesítményének viszonyával lehet jellemezni. Fontos, hogy a kvantálási zaj teljesítménye független a feldolgozott jel nagyságától, a jel viszont nem lehet túl nagy. Jel-zaj viszony alatt ezért gyakran a legnagyobb, még torzítatlanul feldolgozott jel teljesítményének és a zaj teljesítményének a viszonyát értik. Ha a jel maximális amplitúdójú, csúcstényezője c , a visszaállító szűrő B sávszélessége pedig kisebb a mintavételi frekvencia felénél, akkor ez a jel-zaj viszony

$$SNR = \frac{U_p^2/c^2}{2B\Delta^2/(12f_s)} = \frac{3}{c^2} \cdot \frac{f_s}{2B} \cdot 2^{2n}.$$

P.1.1. A visszaállítás jellegzetes hibái, szivárgás és aliasing

A mintasorozat spektrumának átlapolásmentességét biztosítandó a mintavételezésnek kitett jelet eleve szűrik. Ha ennek az ún. antialiasing (bemenő) szűrőnek nem elég nagy a zárósávi csillapítása, akkor a visszaállítás során - a szorosan vett átviteli sávon kívüli esetleges jelösszetevők következtében - ún. *alias* (ál) jelek keletkezhetnek.

A visszaállító szűrő zárósávi viselkedése lehet felelős a rekonstruált jelben megjelenő, az eredeti jel sávján kívüli, *szivárgó* jelösszetevők megjelenéséért.

A bemenő és a kimenő szűrő áteresztősávja egyaránt lineáris torzítást okoz a visszaállított jelben.

Feladat:

Egy 8 kHz mintavételi frekvenciával dolgozó mintavételező rendszer bemenő és kimenő szűrője azonos:

$$H_I(f) = H_O(f) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |f| \leq 3 \text{ kHz} \\ 2.5 - |f/2| & \text{ha } 3\text{kHz} < |f| \leq 5\text{kHz} \\ 0.01 & \text{ha } 5\text{kHz} < |f| \leq 10\text{kHz} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A rendszer a 2 V amplitúdójú, 1 kHz frekvenciájú szinuszos jelösszetevőt - szivárgó komponensektől eltekintve - amplitúdóhelyesen viszi át. Határozzuk meg a szivárgó jelösszetevők amplitúdóját és frekvenciáját! Milyen jel keletkezik, ha a bemenő jel 2 V amplitúdójú, 4.5 kHz frekvenciájú szinuszos jel?

Megoldás:

Az eredeti jel spektruma - még ha olyan elfajuló is, mint esetünkben - a mintavételi frekvencia harmonikusaival eltolódva hozza létre a mintasorozat spektrumát. Így a mintasorozat spektruma az $\pm n \cdot 8 \pm 1 \text{ kHz}$ frekvenciájú harmonikus összetevőket tartalmazza. E komponensek amplitúdója a kimenő szűrő előtti ponton azonos. A szűrő megritkítja ezeket a jelösszetevőket: eliminálja mindazokat, amelyeknek a frekvenciája 10 kHz-nél nagyobb (illetve -10 kHz-nél kisebb). Így csak a $\pm 1 \text{ kHz}$ és a $\pm 8 \pm 1 \text{ kHz}$ frekvenciájú harmonikus összetevők maradnak meg, az előbbieket csillapítatlanul, az utóbbiak $H(\pm 8 \pm 1)$ értékének megfelelően csillapítva. Végül is tehát elmondható, hogy a visszaállított jelben 1 kHz, 7 kHz és 9 kHz frekvenciájú szinuszos összetevők lesznek jelen, ha az első amplitúdója 2 V, akkor a többieké 0.02 V.

A második kérdés megválaszolásához figyelembe kell vennünk, hogy ezt a jelet (e jel mindkét harmonikus komponensét) a bemenő szűrő csillapítja (egy 0.25 értékű faktorial). A mintasorozat spektruma most $\pm n \cdot 8 \pm 4.5 \text{ kHz}$ frekvenciájú összetevőket tartalmaz, amelyek közül a kimenő szűrő véges csillapítással csak a $\pm 4.5 \text{ kHz}$ és a $\pm(8-4.5) = \pm 3.5 \text{ kHz}$ frekvenciájúakat engedi át. Az előbbi összetevőkön az erősítés 0.25, az utóbbiakon 0.75-szeres. Tehát az eredő jelnek két szinuszos komponense lesz, a 3.5 kHz frekvenciájú alias jel amplitúdója 0.375 V, míg a valódi bemeneti jelnek megfelelő összetevő amplitúdója csak 0.125 V.

P.1.2. A mintavételi frekvencia ügyes megválasztása

Egy stacionárius jel (egy 50 ohmos ellenálláson mért feszültség) spektrális sűrűségfüggvénye (a pozitív frekvenciák tartományában) általában zérus, kivéve a 0-3 kHz és a 7-8 kHz sávot, ahol értéke ugyanaz az állandó.

- Hogyan viselkedik a jel spektrális sűrűségfüggvénye a negatív frekvenciákon?
- Határozza meg a jel spektrális sűrűségét (azokon a frekvenciákon, ahol nem zérus), ha tudja, hogy a jel teljesítménye 0.2 mW!
- Milyen frekvenciával kell ebből a jelből mintákat venni ahhoz, hogy a mintákból a jel tökéletesen visszaállítható legyen? Határozza meg az összes szóbjövő frekvenciát, és adja meg a visszaállításhoz alkalmazandó szűrő(ke)t!

Megoldás:

a) A jel spektrális sűrűségfüggvénye páros függvény, hiszen kétoldalas teljesítménysűrűségről van szó.

b) A spektrális sűrűségfüggvény integrálja ("területe") a jel teljesítménye, ebből

$$s_0 = P_{jel} / (2 \cdot B_{össz}) = 0.2 / (2 \cdot 4) = 25 \mu W / kHz.$$

Tekintettel arra, hogy a jel teljesítményét és effektív értékének négyzetét a $P_{jel} = U^2 / R$ reláció összekapcsolja, olykor célszerű a teljesítménysűrűséget "feszültségnégyzet" sűrűséggé alakítani. Ekkor:

$$s_0 = 50 \cdot 25 \Omega \cdot \mu W / kHz = 1250 (mV)^2 / kHz$$

c) $f_s \geq 2 \cdot 8 = 16 kHz$ felett minden mintavételi frekvencia megfelelő, s ekkor a visszaállításhoz 8 kHz határfrekvenciájú (sőt: $f_s/2$ határfrekvenciájú) aluláteresztő szűrő megfelelő.

Némi gondolkodással (s a spektrum "tologatásával") belátható, hogy a $11 kHz \leq f_s \leq 14 kHz$ intervallumba eső mintavételi frekvenciák esetében sem jön létre a spektrum "átlapolódása", s így a mintasorozat spektrumából az analóg jelhez illeszkedő áteresztősávú szűrővel az analóg jel komponensei (és csakis azok) "kiválogathatóak".

P.1.3. Nem alapsávi jel mintavételezése, a túlmintavételezés hatása

Egy valós értékű jel a 19 kHz és a 25 kHz közötti sávon kívül nem tartalmaz komponenseket. Ezt a jelet digitalizáljuk, egy digitális jelfeldolgozó processzorról további műveleteket végzünk rajta, majd a jelet mintáiból visszaállítjuk.

- Mi az a legkisebb mintavételi frekvencia, amelynél még (legalább elvileg) biztosítható a jel tökéletes visszaállítása?
- Hány dB-vel javulna a visszaállítás utáni jel-zaj viszony, ha az előző pontban számított minimális mintavételi frekvencia helyett a határfrekvencia kétszeresével, azaz 50 kHz-el vennénk mintát, a digitalizáláshoz pedig ugyanazt a kvantálót, a visszaállításhoz ugyanazt a szűrőt alkalmaznánk?

Megoldás:

a) A jel (egyoldalas) sáv szélessége csak 6 kHz, s ez háromszor is elfér a 0-19 kHz közötti tartományban. Érdekes tehát a kísérletezést 12 kHz-s mintavételi

frekvenciával kezdeni. Az $F = (-25, -19) \cup (19, 25)$ tartomány 12 kHz -vel jobbra eltolva az $F_1 = (-13, -7) \cup (31, 37)$, 24 kHz -vel eltolva az $F_2 = (-1, 5) \cup (43, 49)$ tartományba képződik le, a 36 kHz -es eltolás az $F_3 = (11, 17) \cup (55, 61)$ sávot eredményezi. Ezekkel nincs is baj, kellemetlenséget a 48 kHz -vel eltolt spektrális komponensek okoznak. Az $F_4 = (23, 29) \cup (67, 73)$ sáv alsó szegélye ugyanis átlapolódik F felső szegélyével. Azonnal látszik, ezt a problémát megoldja, ha a mintavételi frekvenciát kicsit nagyobbra, 12.5 kHz -re választjuk. Ekkor F_4 határa éppen $-25 + 4 \cdot 12.5 = 25 \text{ kHz}$, így itt átlapolódás nincs. Ellenőriznünk kell viszont, nem okoz-e átlapolást F_3 alsó sávjának felső szegélye. Örömmel vehetjük észre, hogy nincs baj, hiszen $-19 + 3 \cdot 12.5 = 18.5 \text{ kHz}$ kisebb, mint 19 kHz . Ugyanakkor azt is észrevehetjük, hogy nagyobb mintavételi frekvenciát csak módjával alkalmazhatunk, legfeljebb $38/3 \cong 12.67 \text{ kHz}$ -ig lehet garázdálkodni. Érdeemes is, hiszen a visszaállító szűrő most sávszűrő, s csak akkor valósítható meg, ha az áteresztő és a zárósávja között véges szélességű átmeneti tartomány is van.

b) A jel-zaj viszonyt három tényező szorzata szolgáltatta. Az átalakítók szóhossza nem változik, a jel csúcstényezője is azonos mindkét esetben (ha a jel szinuszos volna, akkor a szorzótényező $3/2$ lenne, gyakran így találkozunk ezzel a képlettel). A harmadik tényező a mintavételi frekvencia és a visszaállító szűrő „effektív” (és dupla) sávszélességének a hányadosa. Ha a szűrő mindkét esetben ugyanaz, akkor a jel-zaj viszony megváltozása kizárólag az eltérő mintavételi frekvenciák következménye. Ezek aránya viszont közel 4 , pontosabban $150/38$ és 4 közé esik, az **a)** feladatrészben meghatározott mintavételi frekvencia értékétől függően.

P.1.4. A túlmintavételezés ügyes megvalósítása

A túlmintavételezés javíthatja a visszaállított jel minőségét, ráadásul a visszaállító szűrővel szemben támasztott követelmények is enyhíthetőek (szélesebb lehet a szűrő átmeneti tartománya). Ugyanakkor a túlmintavételezés sokba kerül, a több minta több tárterületet, nagyobb átviteli sebességet igényel. Ezen a problémán lehet enyhíteni, legalábbis egyes alkalmazásokban. Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre állnak egy jel ritka, ám pontos mintái (azaz a felvétel nagyon pontos A/D átalakítóval készült), ám a jel visszaállításához rendelkezésünkre álló rendszer D/A átalakítója korlátozott pontosságú, pl. n bites. A visszaállított jel hűségét nyilván a D/A átalakító fogja meghatározni. Megtehetjük, hogy a pontos, ritka minták alapján számítástechnikai eljárással („jelfeldolgozással”) a jel további, az eredeti mintavételi időpontok közé eső mintáit is meghatározzuk. Ha a számítási módszer jó, akkor ezek az értékek pontosak, felhasználhatóak a D/A átalakító sűrűbb vezérlésére, s a visszaállított jel minősége a túlmintavételezés mértékének megfelelően javul, anélkül, hogy több tárolt mintára (az A/D átalakító szaporább működtetésére) lenne szükség.

Feladat:

A 15 kHz sávszélességű jelet 44 kHz frekvenciával mintavételezzük, s a mintákat 20 bites kódszavakkal ábrázoljuk. A visszaállító rendszerben a D/A átalakító 16 bites, a visszaállító szűrő pedig ideális aluláteresztőnek tekintendő.

- a) Mekkora lehet az elérhető jel-zaj viszony javulás, ha a visszaállítást négyszeres sűrűségű (interpolált) mintákkal végezzük?
- b) Mire számíthatunk, ha a visszaállító szűrő 15 kHz törésponti frekvenciájú elsőfokú aluláteresztő?

Megoldás:

a) Noha tudjuk, hogy a szóban forgó jel nem szinuszos, s ezért a teljesítménye nem a csúcérték négyzetének a fele (annál sokkal kisebb), mégis – afféle hivatkozási alapként – használhatjuk a szinuszos jelekre vonatkozó ($c^2 = 2$) eredményt. Eredetileg tehát

$$SNR = \frac{3}{2} \cdot \frac{44}{2 \cdot 15} \cdot 2^{2 \cdot 16} \Rightarrow kb. 99.7 \text{ dB}$$

volna a visszaállított jel minőségét jellemző adat. Négyszeres túlmintavételezésnél a szorzat második tényezője változik, ekkor tehát:

$$SNR = \frac{3}{2} \cdot \frac{4 \cdot 44}{2 \cdot 15} \cdot 2^{2 \cdot 16} \Rightarrow kb. 105.7 \text{ dB}$$

A négyszeres túlmintavételezésnek ugyanaz a hatása, mintha a D/A szóméretét egy bittel növeltük volna.

b) 44 kHz mintavételi frekvencia esetén a visszaállított jelben számottevően nagy, szivárgó összetevők is megjelennek. Még ha az eredeti jelben nincsenek is 15 kHz-nél nagyobb frekvenciájú komponensek, a szivárgó sáv alsó határa elég alacsonyan van ($44 - 15 = 29 \text{ kHz}$), s itt a szűrő még alig csillapít. Magukat a szivárgó komponenseket ugyan nem halljuk (ha egyáltalán hangjelről van szó), ám ezek a termékek az eredeti jel alakítgatására szánt elektronikus szerkezetekben (pl. egy teljesítményerősítő) a legváltozatosabb zavarokat idézhetik elő. Ha a mintavételi (itt most: mintaszolgáltatási) frekvencia négyszeres, akkor a legkisebb szivárgó jelkomponens frekvenciája $4 \cdot 44 - 15 = 161 \text{ kHz}$, itt már az elsőfokú szűrő is kb. 20 dB-t csillapít (azért ez sem túl sok).

G.1.1. Gyakorló feladat

Egy 8 kHz mintavételi frekvenciával működő PCM rendszer bemeneti és kimeneti szűrője a zárótartományban 40 dB csillapítású. A rendszer a $0.3\text{--}3.4\text{ kHz}$ átviteli sávban lényegében tökéletes, alakhű átvitelt biztosít. Így a rendszer bemenetére adott, 2 V amplitúdójú, 1.8 kHz frekvenciájú szinuszos jel hatására a kimenő jel 1.8 kHz -s összetevője ugyancsak 2 V amplitúdójú lesz.

- Mekkora a kimenő jel 6.2 kHz frekvenciájú összetevőjének az amplitúdója?
- Milyen frekvenciájú összetevői vannak még a kimenő jelnek?
- Milyen frekvenciájú komponensek jelen(het)nek meg a kimeneten, ha a bemenő jel amplitúdóját növeljük?

G.1.2. Gyakorló feladat

Egy zenei jelet 8 kHz határfrekvenciájú ideális aluláteresztő szűrővel szűrünk, majd 20 kHz frekvenciával mintavételezünk. A mintákat hibamentes digitális csatornán továbbítjuk, majd 20 kHz frekvenciával adjuk egy D/A átalakító bemenetére. A kimeneti szűrő 4 kHz határfrekvenciájú ideális aluláteresztő.

- Ekvivalens-e a fenti rendszer kimenete azzal az esettel, ha a be- és kimeneti szűrő is 4 kHz határfrekvenciájú ideális aluláteresztő, a mintavételi frekvencia pedig a ki- és bemeneti oldalon egyaránt 10 kHz ?
- Indokolja meg, miért célszerű a minél nagyobb mintavételi frekvencia alkalmazása!

G.1.3. Gyakorló feladat

Egy mintavételes rendszer bemeneti és kimeneti szűrője egy olyan aluláteresztő szűrő, amely 4500 Hz -ig lényegében tökéletes, alakhű átvitelt biztosít, majd egy 500 Hz -es átmeneti tartományt követően a csillapítása 40 dB .

- Mekkora legyen a mintavételi frekvencia ahhoz, hogy a kimeneti *aliased* jelösszetevők szintje biztosan legalább 40 dB -vel kisebb legyen a hasznos jelösszetevők szintjénél?
- Milyen frekvenciájú jel jelenik meg a rendszer kimenetén, ha a bemenő szinuszos jel frekvenciája 4.72 kHz , feltéve, hogy a mintavételi frekvencia 9 kHz ?

G.1.4. Gyakorló feladat

Egy analóg bemenetű, analóg kimenetű, ám belül digitális jelfeldolgozással működő rendszert szinuszos mérőjellel vizsgálunk. A 4 V amplitúdójú, 3.4 kHz frekvenciájú mérőjel hatására a rendszer kimenetén egy 3 V amplitúdójú, 3.4 kHz frekvenciájú komponens mellett megjelenik egy 0.06 V amplitúdójú 11.4 kHz és egy ugyanekkor, 18.2 kHz frekvenciájú jelösszetevő. Ugyanezt a rendszert 4 V amplitúdójú, 11.4 kHz frekvenciájú jellel mérve a kimeneti jel 3.4 kHz frekvenciájú komponense 15 mV amplitúdójú.

- Mekkora lehet a mintavételi frekvencia?
- Mekkora lesz a kimeneti jel 11.4 kHz frekvenciájú összetevője, amikor a rendszert 4 V amplitúdójú, 11.4 kHz frekvenciájú jellel mérjük?