

A szimbólumközi áthallás romboló hatása

Tételezzük fel, hogy az $m(\cdot)$ elemi jel valamely mintavételi fázisban ugyan kielégíti Nyquist feltételét (azaz T közötti mintái rendre $m_0 = 1, m_{\pm 1} = 0, m_{\pm 2} = 0, \dots$), de a mintavételi fázis időzítési hiba következtében elcsúszik, és a meghatározó jelminták $m_0 = 0.99, m_{-1} = 0.1, m_{+1} = -0.1, m_{\pm 2} = 0, \dots$ értékűek lesznek. Becsüljük meg a hibaválósínúséget meghatározó jel-zaj viszony leromlását 2, 4 és 8 szintű rendszerben!

Megoldás:

Feltételezzük, hogy a 2, 4 és 8 szintű rendszerben a jelamplitúdók rendre $\pm 1, \pm 1$ és ± 3 , valamint $\pm 1, \pm 3, \pm 5$ és ± 7 értékűek. Mivel a jelamplitúdók közötti távolság azonos, azonos zajban e rendszerek hibaválósínúsége is összevethető (bár enyhén különböző, miért is?). Akkor, amikor nincs szimbólumközi áthallás, a hibaválósínúséget meghatározó jel-zaj arány $1/\sigma$, ahol σ a zajminták szórása. Az időzítési hiba esetén az adatjel mintái elmosódnak, az aktuális időrés amplitúdója mellett ± 0.1 súlytényezővel a szomszédos időrések amplitúdói is "látszanak". Legrosszabb esetben a szomszédos amplitúdók abszolút értéke maximális, előjelük pedig olyan, hogy hatásuk ugyanabba az irányba tolja el a vett minta értékét. Az eltérő tartalmat hordozó jelminták távolsága így lecsökken, a fél-távolság $0.99 \cdot d_{max} \cdot (0.1 + 0.1)$ lesz. A zaj szórását a dolog nem érinti, ezért a jel-zaj viszony csökkenése rendre 0.79-, illetve 0.39-szeres. 8 szintű rendszerben nagy baj van: $7 \cdot 0.2 > 0.99$, ami azt jelenti, hogy még zaj nélkül is hibás olykor a döntés.

Tanulság: a szimbólumközi áthallás mindig gondot jelent, de ez a gond többszintű rendszerben hatványozottan jelentkezik.

Példa a szimbólumközi áthallás kiegyenlítésére

Próbáljuk meg a fenti adatjelet egy háromegyütthatós FIR szűrővel kiegyenlíteni! Vizsgáljuk meg, hány szintű átvitelt tesz lehetővé a kiegyenlítetlen, illetve a kiegyenlített rendszer!

Megoldás:

Tudományos terminológiával élve a "zero forcing" kiegyenlítési stratégiát választjuk. Tekintsük az adatjel három egymás utáni mintáját! (v_i a zaj aktuális értéke, ami az adott időrésben vett mintára rakódik.)

$$s_{k-1} = -0.1d_{k-2} + 0.99d_{k-1} + 0.1d_{k-0} + u_{k-1}$$

$$s_{k-0} = -0.1d_{k-1} + 0.99d_{k-0} + 0.1d_{k+1} + u_{k-0}$$

$$s_{k+1} = -0.1d_{k-0} + 0.99d_{k+1} + 0.1d_{k+2} + u_{k+1}$$

Az első egyenletet megszorozzuk $0.1/0.99$ -cel, a harmadikat $-0.1/0.99$ -cel és hozzáadjuk a második egyenlethez:

$$\begin{aligned} \hat{s}_k &= 0.101s_{k-1} + s_{k-0} + 0.101s_{k+1} = \\ &= -0.0101 \cdot d_{k-2} + 0.0 \cdot d_{k-1} + (0.99 + 0.0101 + 0.0101) \cdot d_{k-0} + 0.0 \cdot d_{k+1} - 0.0101 \cdot d_{k+2} + \\ &+ 0.0101 \cdot n_{k-1} + n_{k-0} - 0.0101 \cdot n_{k+1} \end{aligned}$$

Végeredményben:

$$\hat{s}_k = -0.0101 \cdot d_{k-2} + 1.0102 \cdot d_{k-0} - 0.0101 \cdot d_{k+2} + 0.0101 \cdot n_{k-1} + n_{k-0} - 0.0101 \cdot n_{k+1}$$

Jól látható, hogy beavatkozásunk nyomán a szimbólumközi áthallás jelentősen (kb. a tizedére) csökkent. Megfigyelhető, hogy d_{k-0} együtthatója is megváltozott (most éppen nőtt, de akár csökkenhetett volna is), s módosult a mintát zavaró zaj teljesítménye (szórása) is. Mindent összevetve a javulás óriási, a kiegyenlített rendszer 32 szintű átvitelre is alkalmas, hiszen $31 \cdot 0.0202 \approx 0.63 < 1.0102$.

Felmerülhet a kérdés, lehet-e tovább javítani (hiszen 64 szintű átvitelre még ez a rendszer sem alkalmas) a helyzetet. A válasz igenlő, több jelminta (pl. öt a három helyett) lineáris kombinációját képezve a második szomszédok hatása is eliminálható, persze ekkor a döglött ló átkerül a harmadik szomszédba. De mindenesetre kevesebb marad belőle.