MÉRNÖKI MODELLALKOTÁS AZ ELMÉLETTŐL A GYAKORLATIG

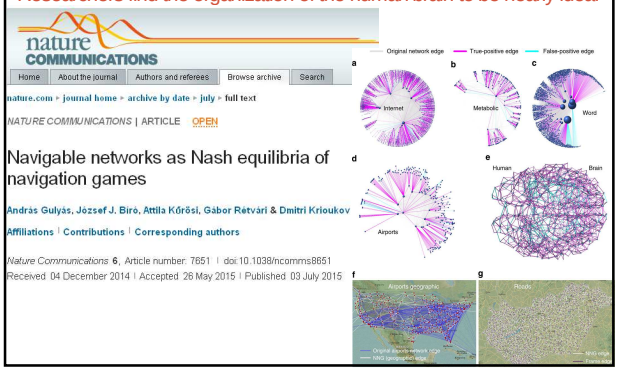
HÁLÓZATI KÓDOLÁS A JÖVŐ KOMMUNIKÁCIÓS HÁLÓZATAIBAN

Dr. Babarczi Péter
egyetemi adjunktus

BME Távközlési és Médiainformatikai Tanszék
MTA-BME Lendület Jövő Internet Kutatócsoport

Hatalmas sikert értek el a BME kutatói

Researchers find the organization of the human brain to be nearly ideal

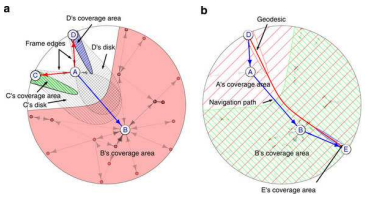


MI VÁRHATÓ A FÉLÉVBEN?

Dr. Gulyás András

Hálózatok kialakulásának vizsgálata játékelmélettel

- Valós hálózatok (mérnöki, biológiai, közösségi, gazdasági) tulajdonságainak áttekintése
- Történelmi jelentőségű (klasszikus) hálózatmodellek ismertetése (véletlen gráfok, növekedési modellek stb.)
- Játékelmélet alapú modellek alapjai (játékelmélet alapfogalmai, egyszerű példák, hálózatformációs játékok, navigációs játékok)



Dr. Babarczi Péter

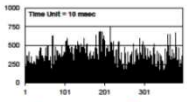
Csomagok továbbítása szűkös erőforrásokon

- Összeköttetések versengés helyett működjenek együtt a hálózati erőforrások kihasználásáért
  - Feladat: Maximalizáljuk a throughputot kommunikációs hálózatokban!
- Megfelelő leíróerejű modell alkalmazása
  - Ami évtizedekig nem ment gráfelmélet, az algebrailag megközelítve egy új kutatási területet indított 2000-ben
  - 2008 óta egyre több gyakorlati megvalósítás
- Az elmélettől a gyakorlatig…
  - Elméleti alapok, nehézségek, alapfogalmak
  - Megbízható hálózat tervezési követelmények
  - Egy egyszerű ötlettől egy megvalósult EU projektig…

Az Internet forgalmi tervezése

Dr. Molnár Sándor

Erőforrások: sávszélesség és annak megosztása



?

QoS, QoE

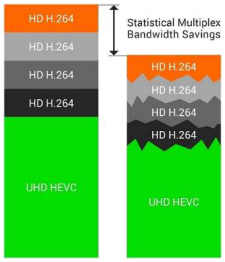
Forgalmi igények: stacionárius érkezési folyamat (csomag, folyam,kapcsolat)

Teljesítmény: csomagvesztési arány, válaszadási idő, stb.

Dr. Bíró József

Statisztikus multiplexelés, sávszélesség becslés

- Mekkora sávszélesség szükséges kötegelt (multiplexelt) beszéd vagy videófolyamok esetén ?
- Tudunk-e megtakarítani sávszélességet a csúcsigények összegéhez képest ?
- Olyan eljárásokat mutatunk, amelyek kevés paraméter alapján adnak jó becsléseket !
- Nemcsak hálózattervezőknek, hanem biztosítási kockázatelemzőknek is hasznos!!



Dr. Rétvári Gábor

Bevezetés a dinamikus programozásba: IP forgalomtovábbítási táblák tömörítése

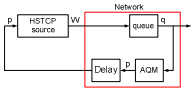
- **Dinamikus programozás:** komplex problémák megoldásának visszavezetése megfelelően megválasztott egyszerű részproblémák rekurzív megoldására
- Hasznos eszköz jól struktúrált feladatok megoldására
- A módszert az IP forgalomtovábbítási táblák tömörítésének gyakorlati feladatán keresztül szemléltetjük
  - Háttér
  - IP routing táblák minimalizálása
  - Forgalomtovábbítás szint-tömörített prefix fákkal
  - Gyakorlat: DP-k felírása, fa-bejárások, prefix fák tömörítése

Dr. Sonkoly Balázs

Forgalomszabályozás az Interneten

- Sok területen jön elő, egyik legfontosabb: TCP (Transmission Control Protocol)
- Probléma:
  - a küldő határozza meg az adási sebességet a vevő felé
  - sok küldő használja a közös hálózati erőforrásokat (linkek, routerek, switch-ek, bufferek, ...)
  - ki milyen sebességgel adjon, hogy "optimálisan" használják a hálózatot?
- Egy megoldás: TCP
  - első verzió – 1974
  - "congestion collapse" – 1986 -> torlódásvezérlés, implementáció (BSD)
  - akkori környezetben meglepően jó működés
  - de miért lett ilyen jó?
  - **"reverse engineering" – '90-es évek -> matematikai modellek**
- folytonos idejű visszacsatolt rendszer
  - folyadékmodell
  - szabályozástechnika
  - stabilitásvizsgálat
  - …

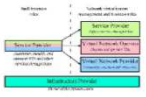
$$W(t) = \frac{a(W(t))}{R(t)} - b(W(t))\,W(t)\frac{W(t-R(t))}{R(t-R(t))}\,p(t-R(t))$$

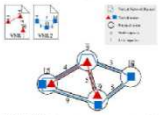


Dr. Maliosz Markosz

Virtual Network Embedding Virtuális hálózat beágyazás

- VNE feladat áttekintése
  - a feladat alkalmazási területei a gyakorlatban
  - a probléma formalizálása, paraméterek, mérőszámok, célok
  - megoldási módszerek, algoritmusok áttekintése
- Egy kiválasztott megoldási módszer részletei
- Szimulációs eszköz (gyakorlat)
  - VNE algoritmusok kiértékelése





Források:
- A Fischer, JF Botero, MT Beck, H De Meer, X Hesselbach, *Virtual Network Embedding: A Survey*, IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2013.
- http://sourceforge.net/projects/alevin/

Tárgykövetelmények – Aláírás,vizsga

- Aláírás:
  - Előadások
    - ajánlott ☺ részvétel, 7 külön tématerületbe kaphattok betekintést
    - **ZH nincs**
  - Gyakorlatok:
    - félév folyamán 6 gyakorlat
    - **gyakorlatok min. 70%-án kötelező a részvétel** (min. 5 gyakorlat)
    - gyakorlatokra aki tud, laptoppal érkezzen!
      - Octave telepítve: https://www.gnu.org/software/octave/
  - **Házi feladatok** „elégséges" szintű **teljesítése**
- Vizsga jegy:
  - Írásbeli vizsga (Nagyon nehéz! De tényleg, látni fogjátok!)
  - **Házi feladatok alapján megajánlott jegy szerezhető**!

Tárgykövetelmények – Házi feladat

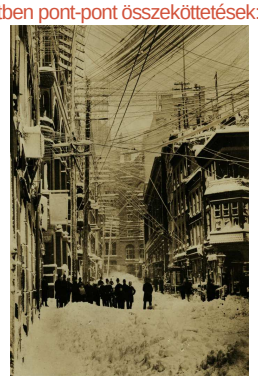
- Három házi blokk (2-2-3 téma anyagát lefedve)
  - **1. házi:** kiadás: szeptember 24-i gyak (3. hét), beadás: október 13-i előadás (6. hét)
  - **2. házi:** kiadás: október 22-i gyak (7. hét), beadás: november 10-i előadás (10. hét)
  - **3. házi:** kiadás: november 19-i gyak (11. hét), beadás: december 8-i előadás (14. hét)
- Mind a 7 téma anyagából 2 kis feladat (7x2x10 pont = 140 pont)
- Az első 6 téma anyagából 1 nagy feladat (6x30 pont = 180 pont)
  - **Megajánlott jegy**: Max. 320 pont, **jeles (5)** >= 260 pont, **jó (4)** >= 230 pont
  - **Aláíráshoz**: **min.10 pont mind a 7 téma anyagából külön-külön**!
- Házik pótlása: Aláíráshoz hiányzó házik (és csak azok!) pótlási héten **személyesen** pótolhatók

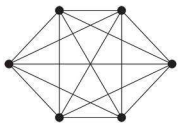
COMPUTE-AND-FORWARD ELV

Hálózati evolúció / revolúció a telefontól az adatközpontokig

Telefonhálózat evolúciója (1870-es évek)

Kezdetben pont-pont összeköttetések: teljes gráf



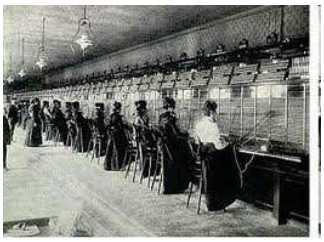


Telefonhálózat evolúciója (1870-es évek)

Később mindenki egy központba bekötve – csillag topológia

Telefonhálózat evolúciója (1870-es évek)

Később központok hierarchiája – szövevényes hálózati struktúra



- Alapelv: ***áramkörkapcsolás***
  - „fémes kapcsolat" a hívó és a hívott között
  - beszéd forgalomra optimalizálva
  - https://www.youtube.com/watch?v=qaJYWrYKVRo

Telefonhálózat evolúciója (1890-es évektől)

Automatizálás, Digitális technológia – közös platform

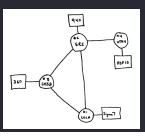
- Rendszerek világméretű együttműködése
- Fizikai áramkörök helyett virtuális áramkörök megjelenése

Forradalom (revolution, 1960-as évek)

Áramkörkapcsolás - csomagkapcsolás

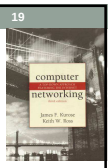
- **Megbontjuk az áramkör koncepciót -> csomagok**
  - 1961: Kleinrock
    - Első publikáció csomagkapcsolt hálózatokról, sorbanállás-elmélet
  - 1969: első távoli hozzáférés, az Internet ősének születése

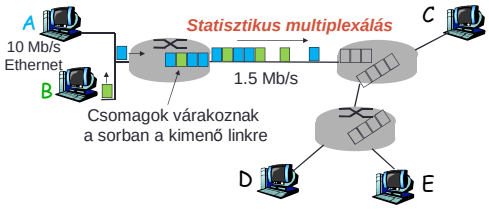
"We set up a telephone connection between us and the guys at **SRI**...," Kleinrock ... said in an interview: "We typed the **L** and we asked on the phone, "Do you see the **L**?"
"Yes, we see the **L**," came the response.
"We typed the **O**, and we asked, "Do you see the **O**."
"Yes, we see the **O**."
"Then we typed the **G**,
and the **system crashed**"...
Yet a **revolution had begun**"...
Source: *Sacramento Bee*, May 1, 1996, p.D1



Forradalom (revolution, 1960-as évek)

Store-and-forward

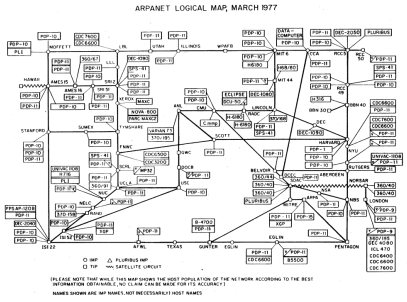




- Az A és B gépek által küldött csomagoknak nincs meghatározott sorrendje, igény szerint osztoznak az erőforráson = **statisztikus multiplexálás**.
- **Store-and-forward elv**
  - A routerek várakozási soraiban az adatok várakoznak, amíg a csatorna szabad

Internet evolúciója (1980-as évek)

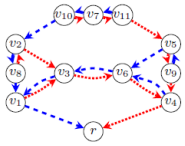
TCP/IP protokoll megjelenése



Internet evolúciója (Napjainkban, 2010-es évek)

Multicast és multipath előretörése

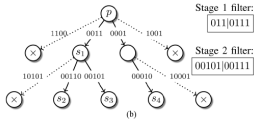
- Az áramkör koncepció felbontása előnyös
  - ***Multicast*** (többesadás): egy forrás több nyelő
    - Video forgalom ma már a domináns (pl. IPTV)
  - ***Multipath Internet***: egyetlen út helyett akár több út is rendelkezésére áll a forrásnak
- Multipath Internet előnyei:
  - Terhelés kiegyenlítés
    - IP rétegben is törekvések szabványosításra (MRT)
    - SDN megjelenése felgyorsította ezt a folyamatot
  - Magasabb megbízhatóság
    - Forgalom adaptálódik a hálózati viszonyokhoz
    - A forrás képesek a hibát kikerülni
  - Biztonság (lehallgatás ellen)
  - Throughput
    - Multipath TCP (MPTCP szállítási rétegben)



Forradalom (revolution, 2020-as évek)

Új architektúrákhoz új szemlélet – compute-and-forward

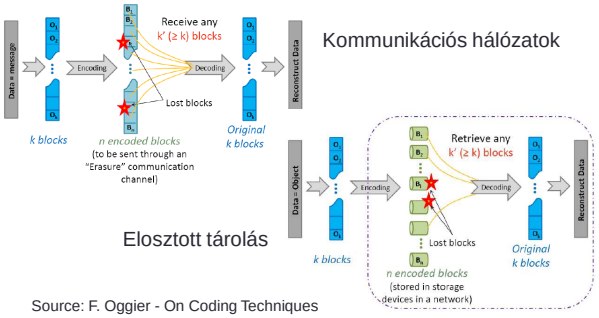
- Példa: Tartalom/információ centrikus hálózatok (Content/Information Centric Networks, CDN/ICN)
  - A kommunikáció sokkal inkább arra irányul, hogy **milyen** információra van szükség ahelyett, hogy az információ **hol** található
    - Publish/subscribe architektúra (**randevú, topológia kialakítása, továbbítás**) alapvetően **multicast alapú továbbítást** valósít meg
    - IP helyett új fajta címzési architektúrák jelennek meg



- Ha megint változik az architektúra, akkor ismét lehetőség a csomag koncepció megbontására: **csomagok helyett kódolt információ**

Forradalom (revolution, 2020-as évek)

Az adatok továbbítása (routerek) és tárolása (distributed storage) logikailag nem válik el egymástól

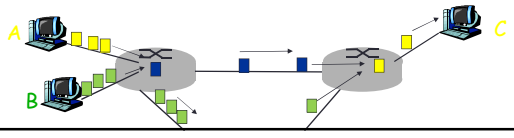


Source: F. Oggier - On Coding Techniques for Networked Distributed Storage Systems

Milyen előnyei lehetnek a kódolásnak?

Compute-and-forward (a korábbi store-and-forward helyett)

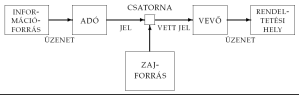
- Throughput
  - Több információ átvitele kevesebb csomaggal/rövidebb idő alatt
  - Köv.: **kisebb késleltetés**, vezetéknélküli hálózatokban kevesebb energia
- Ellenállóság
  - Link hibák ellen
  - Csomagvesztés esetén
- Komplexitás
  - A csomag/folyam koncepció megbontása sokkal hatékonyabb algoritmusok alkalmazását teszi lehetővé (pl. kapacitás foglalásra)
- Biztonság
  - Egy-egy út lehallgatásával a teljes üzenet nem állítható helyre
  - Tárolás esetén adatunkat megosztjuk több felhő között



De mit is kódoljunk és hogyan?

Más koncepció, mint amiket eddig ismertünk

- Csatorna kódolás
  - Zajos csatornán üzenetet átküldeni
  - „***redundanciát adunk az adathoz***" (pl.: Reed-Solomon kódok)
  - erasure coding: k szimbólumból álló üzenetet $n > k$ szimbólumba alakítok úgy, az üzenet bármely k darabból helyreállítható
- Forrás kódolás
  - Az információforrás üzeneteit gazdaságosan, tömören reprezentáljuk
  - „***eltávolítjuk a redundanciát***" (pl.: Huffman kódok, más prefix kódok)
- GOND: Csatorna- és forrás kódolás mind-mind *end-to-end*
  - A hálózathoz (pl.: eltörlődéses hibák, link meghibásodások) való adaptációt a végpontok végzik (nem tudok „re-kódolni" ***a hálózat belsejében*** anélkül, hogy ***dekódolnom kell***ene ***az eredeti üzenetet***)
  - Dekódoláshoz bufferelnem kell, meg kell várnom a szükséges csomagokat…
  - Nehézkes, lassú, szakítani kell ezzel a koncepcióval.
  - *A gyors („tactile") 5G Interneten ez az extra késleltetés nem megengedhető!*



Hálózati kódolás – Network coding

A küldendő információ egy másik reprezentációja

- *Csomagokat a **hálózat belsejében** nyugodtan újra kódolhatom egymással dekódolás nélkül!*
  - Lehetőség szerint minden csomag tartalmazzon új információt a nyelőnek (***Coupon collector problem***)
- Feladat: hogyan töltsem ki a kódoló mátrixot?

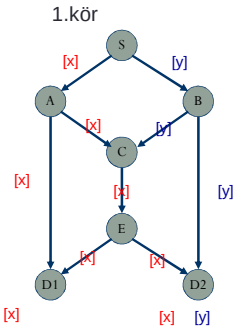
$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}$$

Kódolt információ — Kódoló együtthatók (később: ***transzfer mátrix***) — Eredeti információ (pl.: bit, bájt, csomag)

Példa 1 („Butterfly network")

Üzenetküldés multicast estén (Cél: max throughput elérése)

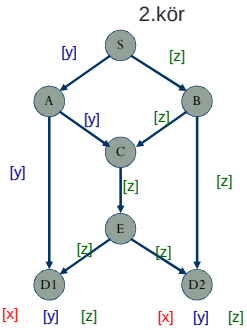
- Hagyományos store and forward koncepció (throughput: 3 üzenet / 2 körben = 1.5)



Példa 1 („Butterfly network")

Üzenetküldés multicast estén (Cél: max throughput elérése)

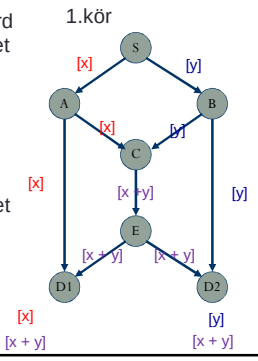
- Hagyományos store and forward koncepció (throughput: 3 üzenet / 2 körben = 1.5)



Példa 1 („Butterfly network")

Üzenetküldés multicast estén (Cél: max throughput elérése)

- Hagyományos store and forward koncepció (throughput: 3 üzenet / 2 körben = 1.5)



- Compute (encode) and forward koncepció (throughput: 2 üzenet / 1 körben = 2)

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hálózati kódolás alaptétele

Multicast esetén megvalósítható maximális adatsebesség

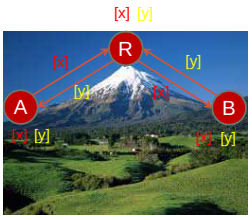
- **Tétel (multicast)**: Az s forrás és a $t_1, t_2, \ldots, t_L$ nyelők között megvalósítható adatsebesség maximális értéke megegyezik az $s - t_i$ unicast összeköttetések esetén elérhető maximális adatsebességek minimumával.
  - Az előző példában 2-2 volt mindkét nyelőre a maximális folyam értéke, melyet meg is tudtunk valósítani.
  - Ennél jobbat nem is várhatunk, hiszen külön-külön sem tudnánk többet küldeni.
- Azaz hálózati kódolás esetén az egyes folyamok ***együttműködnek egymással*** a szűkös erőforrások gazdaságos kihasználásáért
  - Kódolás nélkül a **felhasználók** versenyeztek (folyadék modell)
  - ***Network Information Flow*** (**hálózat** által elérhető adatsebesség)

R. Ahlswede, N. Cai, S. Li, and R. Yeung, Network information flow, IEEE Transactions on Information Theory, 46(4):1204–1216, 2000

Példa 2 („Wireless butterfly”)

Üzenetküldés vezeték nélküli relay estén (**broadcast csatornát kihasználva**)

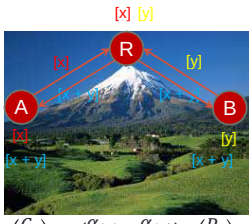
- Hagyományos store and forward koncepció (4 üzenet)
  - A küld üzenetet R-nek [x]
  - B küld üzenetet R-nek [y]
  - R továbbítja A üzenetét B-nek [x]
  - R továbbítja B üzenetét A-nak [y]



Példa 2 („Wireless butterfly”)

Üzenetküldés vezeték nélküli relay estén (**broadcast csatornát kihasználva**)

- Hagyományos store and forward koncepció (4 üzenet)
  - A küld üzenetet R-nek [x]
  - B küld üzenetet R-nek [y]
  - R továbbítja A üzenetét B-nek [x]
  - R továbbítja B üzenetét A-nak [y]
- Compute (encode) and forward koncepció (3 üzenet)
  - A küld üzenetet R-nek [x]
  - B küld üzenetet R-nek [y]
  - **R broadcastolja A és B üzenetének kombinációját [x y]**



$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hálózati kódolás alkalmazási területei

- Wireless networks
  - Broadcast, MAC további előnyöket biztosít (LTE, WiFi, stb.)
- 5G hálózatok
  - Minimális késleltetés biztosítása random kódolással (edge cloudok)
- Peer-to-peer
  - Média folyamok hatékonyabb továbbítása (IETF WebRTC)
  - Microsoft Avalanche (BitTorrent-hez hasonlóan, csak NC-vel)
- Distributed storage systems (hasonlóan erasure coding-hoz)
  - Duplikálás ($n = 2$) sok erőforrást igényel, hogyan tudjuk a legkevesebb redundanciával tárolni az adatot (M/k) a felhőben n szerveren, hogy
    - Bármely k szerver ($k \ll n$) segítségével helyreállítható
    - Bármely k szerver adatából helyettesíthető egy kiesett szerver
- Multipath Internet
  - Resilience in Software Defined Networks- következő előadásban látni fogjuk (***MINERVA projekt***)

HÁLÓZATI KÓDOLÁS

Algebrai reprezentáció

Lineáris kódok

2000: A kezdetek…

Gráfelméleti megközelítés

- Ahlswede et. al.
  - A legendás „butterly network” pillangó hálózat megálmodása
  - Hálózati kódolás alaptételének bizonyítása
    - Max-flow min-cut theoremen, azaz ***gráfelméleti módszerek***en alapul
  - Túl bonyolult volt ahhoz, hogy sokan elkezdjenek vele foglalkozni
- Aztán elérkezett 2003…
  - R. Koetter and M. Médard. *An algebraic approach to network coding*. IEEE/ACM Transactions on Networking, 11(5):782–795, 2003
  - Megmutatják, hogy a hálózati kódolás feladata valójában ekvivalens egy mátrix megfelelő kitöltésével
    - a hálózati kódolás ***algebrai megfogalmazása***

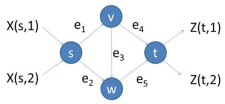
Egy kis algebra…

Műveletek véges testek felett

- $GF(p)$- p elemű véges test (Galois Field)
  - Test axiómák (+ -re és × -ra nézve): nullelem, egységelem, asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás
- Ha p prím, akkor az elemek ***modulo műveletekre*** testet alkotnak, pl.: $p = 2$ esetén 0,1 a két elem, a műveletek (XOR, kizáró vagy):
  - $0 + 0 = 0 \ mod \ 2$ $\quad 0 \times 0 = 0 \ mod \ 2$
  - $0 + 1 = 1 \ mod \ 2$ $\quad 0 \times 1 = 0 \ mod \ 2$
  - $1 + 0 = 1 \ mod \ 2$ $\quad 1 \times 0 = 0 \ mod \ 2$
  - $1 + 1 = 0 \ mod \ 2$ $\quad 1 \times 1 = 1 \ mod \ 2$
- Ha p prím hatvány, pl.: $p = 4 = 2^2$, akkor testelemek 0,1,2,3, a műveletek pedig ***polinom aritmetika*** szerint működnek
  - Egy irreducibilis polinom, pl.: $a(y) = y^2 + y + 1$ maradékosztályaiként előállnak a testelemek ($[0], [1], [y], [y+1]$, azaz binárisan $00, 01, 10, 11$):
    - $[y] + [y+1] = [1]$ (helyiértékenkénti $mod \ 2$ összeadás)
    - $[y] \times [y] = [y+1]$, mert $y^2 \ mod \ (y^2 + y + 1) = [y+1] = 11$ (binárisan) $= 3$

Hálózati kódolás

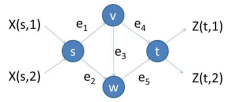
Algebrai feladat megfogalmazás



- Bemenet
  - A hálózat topológiája $G = (V, E)$
  - C összeköttetés igény (forrás, cél(ok), információ mennyiség)
- Modell
  - *Idealizált modell*: teljes szinkronizáció, hibamentes működés (nincs csomagvesztés), **késleltetés−mentes linkek**
  - $X(s, i)$ az s forrásnál található (i = 1, … , μ) random információforrások (gyakorlatban pl.: *VLC stream csomagjai*)
    - Az $X(s)$ -ben keletkező random ***információt m hosszú részekre osztjuk, és a $GF(q = 2^m)$ véges test szimbólumainak tekintjük őket***
      - Megj: bármely más prím is jó 2-n kívül, de nem jelent további előnyöket
  - $Z(t, i)$ a t nyelőben kapott szimbólumok az i forrástól
- Feladat:
  - 1) Kódoló részgráf meghatározása (ezzel most nem foglalkozunk, adottnak tekintjük, ***általában DAG*** a késleltetés-mentesség miatt)
  - 2) ***Az adott kódoló részgráfon hálózati kód konstruálása***

Lineáris hálózati kódok

Példa 3: Unicast igény $G = (V, E), C = (s, t, \{1,2\})$



$$Y(e_1) = \alpha_{1,e_1} X(s,1) + \alpha_{2,e_1} X(s,2)$$
$$Y(e_2) = \alpha_{1,e_2} X(s,1) + \alpha_{2,e_2} X(s,2)$$
$$Y(e_3) = \beta_{e_1,e_3} Y(e_1)$$
$$Y(e_4) = \beta_{e_1,e_4} Y(e_1)$$
$$Y(e_5) = \beta_{e_2,e_5} Y(e_2) + \beta_{e_3,e_5} Y(e_3)$$
$$Z(t,1) = \varepsilon_{e_4,1} Y(e_4) + \varepsilon_{e_5,1} Y(e_5)$$
$$Z(t,2) = \varepsilon_{e_4,2} Y(e_4) + \varepsilon_{e_5,2} Y(e_5)$$

- $m = 1$ esetén a test $GF(2)$, azaz bitenként nézem felhasználó folyamot, és ha egy adott pillanatban $X(s,1) = 0, X(s,2) = 1$, ekkor $\alpha \in \{0,1\}$, és

$$Y(e_1) = \left(\alpha_{1,e_1} \times 0 + \alpha_{2,e_1} \times 1\right) mod\ 2 = \{0,1\}$$

- $m = 8$ esetén a test $GF(256)$, azaz bájtonként nézem felhasználó folyamot, és egy adott pillanatban $X(s,1) = 00001001 = y^3 + 1 = 9$, $X(s,2) = 00010000 = y^4 = 16$, ekkor $\alpha \in (0,255)$, és

$$Y(e_1) = (\alpha_{1,e_1} \times [y^3{+}1] + \alpha_{2,e_1} \times [y^4])\ mod\ (y^8 + y^4 + y^3 + y + 1) = (0,255)$$

Lineáris hálózati kódok

Valójában az előbbi egyszerű (lineáris) műveletek mindig elegendőek

- Lineáris kódok (irányított körmentes gráfokban)
  - Az $e = (v, u)$ linken küldött szimbólum a v-ben keletkező információ, és a v -be befolyó éleken érkező szimbólumok lineáris kombinációja

$$Y(e) = \sum_{l=1}^{|X|} \alpha_{l,e} X(v,l) + \sum_{e' \in be(v)} \beta_{e',e} Y(e')$$

  - A nyelő (cél-) csomópontnál az információ (pl.: $m = 8$ hosszú darabja) előáll a bejövő éleken érkező szimbólumok lineáris kombinációjaként

$$Z(v,l) = \sum_{e' \in be(v)} \varepsilon_{e',l} Y(e')$$

- Feladat: $\alpha, \beta, \varepsilon$ ***együtthatók meghatározása***
  - CÉL: $\forall l$: $Z(v', l) = X(v, l)$, azaz pontosan dekódolni tudjuk a v' nyelőben a v forrás által küldött szimbólumokat
    - Dekódolhatóság feltétele: ***az M transzfer mátrix*** $(z = Mx)$***teljes rangú*** $(\det(M) \neq 0)$
  - $\alpha, \beta, \varepsilon$ -t az adott test feletti ***változóknak*** tekintjük
    - Következmény: M transzfer mátrix elemei a $\boldsymbol{GF}(2)[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}]$ polinomgyűrű elemei
    - **Lemma**: Végtelen számú nemnulla determinánst eredményező megoldás létezik. (Nekünk csak egy kell!)

S. Li, R. Yeung, and N. Cai. *Linear network coding*. IEEE Transactions on Information Theory, 49(2):371–381, 2003.

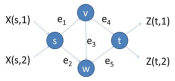
Megfelelő leíróerejű modell megalkotása

R. Koetter and M. Médard, 2003: Kapcsolat gráfelmélet és algebra között

- **Tétel (unicast)**: Az alábbi három állítás ekvivalens egymással:
  - (C1) Létezik r értékű folyam s és t között.
  - (C2) A minimális vágás érétke s és t között legalább r.
  - ***(C3) Az M transzfer mátrix determinánsa nemnulla a $GF(2)[\alpha, \beta, \varepsilon]$ polinom gyűrű felett.***
- (C1) és (C2) a jól ismert ***max-flow min-cut theorem***, melyre a Ford-Fulkerson algoritmus megtalálja a megoldást.
  - DE: csak unicast összeköttetések estén tudjuk alkalmazni.
- (C3) *A gráfelméleti probléma helyett egy (könnyebb) algebrai feladatok kell megoldanunk*
  - Tetszőleges kommunikáció (multicast, multi-source multicast, stb.) esetén is csak egy mátrix determinánsát kell vizsgálunk

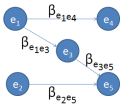
Lineáris kommunikációs hálózat

Kimenet és bement közötti összefüggés $(z = Mx)$ átviteli mátrixszal leírható



- Irányított címkézett élgráf
  - éleknek fix sorrendje a DAG egy topologikus rendezésének megfelelően (pl.: e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)
  - az élgráf szomszédossági mátrixa

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_{e_1 e_3} & \beta_{e_1 e_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{e_2 e_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{e_3 e_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



  - **Lemma**: $(I - F)$-nek létezik inverze $\boldsymbol{GF}(2)[\boldsymbol{\beta}]$ felett.
- Bemeneti mátrix $(\mu \times |E|)$: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,e_1} & \alpha_{1,e_2} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{2,e_1} & \alpha_{2,e_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Kimeneti mátrix $(|E| \times \mu)$: $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{e_4,1} & \varepsilon_{e_5,1} \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{e_4,2} & \varepsilon_{e_5,2} \end{pmatrix}$

Lineáris kommunikációs hálózat

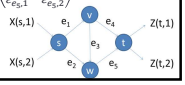
Átviteli (transzfer) mátrix elég természetesen adódik…

- **Tétel**: Tegyük fel, hogy a hálózat az A, B, F mátrixokkal adott. Ekkor a hálózat átviteli mátrixa $M = A(I - F)^{-1} B^T$ módon számolható $(z = Mx)$, ahol I az $|E| \times |E|$ egységmátrix.
- **Bizonyítás:**
  - A, B valójában csak a bemeneti és a kimeneti folyamok lineáris keverését végzik
  - $X(v, i)$ bemeneti folyam és a $Z(v', j)$ kimeneti folyam ***impulzus válaszához*** az összes lehetőséget figyelembe kell vennünk, ahogy $X(v, i)$ hozzájárulhat $Z(v', j)$-hez
  - Az összes v és v' közötti 0,1,2,3, … élből álló, végtelen számú utat figyelembe kell vennünk
    - A szomszédossági mátrix alapján egyszerűen meghatározhatjuk, mennyivel járul hozzá $X(v, i)$ a $Z(v', j)$-hez egy k hosszú úton (F^k)
    - A végtelen összeg: $I + F + F^2 + F^3 + \cdots$

Lineáris kommunikációs hálózat

Kimenet és bement közötti összefüggés átviteli mátrixszal leírható

- **Bizonyítás (folyt):**
  - Viszont a ***DAG tulajdonság*** miatt az F szomszédossági mátrix egy felső háromszög mátrix, és mint ilyen, ***nilpotens***, azaz (a fenti példára):
    - $F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{e_1e_3}\beta_{e_3e_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F^3 = F^4 = F^5 = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - Azaz $I + F + F^2 + F^3 + \cdots$ egy ***véges sorösszeg***, ami pont a mértani sor sorfejtése, azaz $(I - F)^{-1}$ inverzet adja eredményül.
- A transzfer mátrix a mi példánkra (***teljes rangúnak kell lennie!***):
  - $M = \begin{pmatrix} \alpha_{1,e_1} & \alpha_{1,e_2} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{2,e_1} & \alpha_{2,e_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_{e_1e_3} & \beta_{e_1e_4} & \beta_{e_1e_3}\beta_{e_3e_5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \beta_{e_2e_5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta_{e_3e_5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \varepsilon_{e_4,1} & \varepsilon_{e_4,2} \\ \varepsilon_{e_5,1} & \varepsilon_{e_5,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$
  - $X(s,1)$ bmenet és a $Z(t,1)$ kimenet közötti összefüggés: $P = \alpha_{1,e_1}\beta_{e_1e_4}\varepsilon_{e_4,1} + \alpha_{1,e_1}\beta_{e_1e_3}\beta_{e_3e_5}\varepsilon_{e_5,1} + \alpha_{1,e_2}\beta_{e_2e_5}\varepsilon_{e_5,1}$



HÁLÓZATI KÓD KONSTRUKCIÓK

Determinisztikus / random kódoló algoritmusok

Ki mondja meg, hogy hogy kódoljak?

Az F szomszédossági mátrix (kódoló együtthatók) meghatározása, hogy $\det(M) \neq 0$

- Determinisztikus hálózati kód konstrukció
  - **-** Előre meg kell mondanom, hogy a hálózatban pontoson ki mit csináljon (hogyan állítsa elő a bementi csomagokból a kimeneti kódot)
    - SDN esetén a kontroller, egyébként pl.: a forrás
  - **+** Hatékonyabb (kisebb test méret elegendő)
- Random Linear Network Coding (RLNC)
  - **+** Mindenki elosztott módon, véletlenszerűen kódolja a bejövő csomagokat
    - Nincs hozzáadott késleltetés: ha egy csomag nem érkezett meg, nem várunk rá („coding on-the-fly")
    - Meglepő módon így is elég hatékonyan tudunk továbbítani (a rekódolás, azaz a **nem** end-to-end tulajdonság következményeképp)
  - **-** Helyreállításra nincs 100% garancia, de ha elég ügyesek vagyunk, akkor majdnem biztosan tudunk dekódolni
    - Minden új üzenet hordoz valami új információt a nyelő számára

Determinisztikus kód konstrukció multicast esetén

Folyam alapú szisztematikus algoritmus

- Kiindulás:
  - Irányított körmentes hálózati topológia (***kódoló részgrát***)
    - Késleltetésekkel nem foglalkozunk, ideális modell!
  - Meghatározzuk a maximálisan megvalósítható adatsebességet (**Hálózati kódolás alaptétele**: ez pont az unicast összeköttetések maximális adatsebességének minimuma, legyen *r*).
  - Javító utakkal (Ford-Fulkerson) meghatározunk *s* forrás csomópontból *r* útvonalat minden egyes nyelőbe (mindegyiken egy-egy csomagot fogunk célba juttatnunk a forrásból egy adott körben).
    - **Hálózati kódolás alaptétele**: ennél több él nem is kell, a többi élen a kódoló együtthatók nullára állíthatóak (értsd törölhetőek)
  - *d* darab nyelő csomópont, akik mind szeretnék mind az *r* csomagot megkapni minden egyes körben.
- Jaggi algoritmus:
  - A fenti feladatra létezik polinom idejű determinisztikus algoritmus, mely szisztematikusan meghatározza a hálózati kódot a megoldás élein
  - A testméret legalább akkora, mint a nyelők száma, azaz *GF(q)* megoldás létezik, ha $q \geq d$.

Jaggi, Sidharth, et al. "*Polynomial time algorithms for multicast network code construction*.", **IEEE Transactions on Information Theory**, 51.6 (2005): 1973-1982.

Determinisztikus kód konstrukció multicast esetén

Jaggi algoritmus vázlat

- Algoritmus
  - Vesszük a javító utakkal kapott (Ford-Fulkerson) élek *A* halmazát egy előre megadott topologikus sorrendben (mivel DAG-ban vagyunk, ez OK)
  - Válasszuk a testméretet úgy, hogy $q = 2^m \geq d$
  - Minden egyes *d* nyelőre karban tartunk egy S_d vektor halmazt (Frontier Set), amely az *r* darab *d*-be menő élfüggetlen úton az utoljára beállított élek hálózati kódjait tartalmazza
    - Ezek a vektorok az *s* forrásnál *GF(q)* feletti *r*-dimenziós tér egy bázisát alkotják (pl.: egység választással) minden egyes nyelőre
  - Vesszük a topologikus sorrendben az éleket *A*-ból
    - CÉL: olyan hálózati kódok választása az adott élre, hogy minden egyes lépés után minden *d* nyelőre S_d-ben lévő vektorok továbbra is az r-dimenziós tér egy bázisát alkossák
    - Ezáltal az algoritmus leállásakor (azaz a kész kódoláskor) minden egyes *d* nyelőbe beérkező *r* úton lineárisan független vektor érkezik

Jaggi, Sidharth, et al. "*Polynomial time algorithms for multicast network code construction*.", **IEEE Transactions on Information Theory**, 51.6 (2005): 1973-1982.

Determinisztikus kód konstrukció multicast esetén

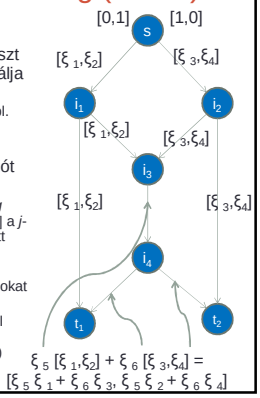
Jaggi algoritmus hatékonysága – Hogyan válasszuk a linkek hálózati kódját?

- Véletlenszerűen addig próbálkozunk, amíg jó nem lesz
- Gyorsítás (hatékony hálózati kód választás)
  - Minden egyes *l* élhez S_d-ben karbantartunk egy $\underline{l}$ vektort, mely merőleges S_d-ben lévő többi *r-1* vektorra.
  - Ekkor az a link kódjának lineárisan függetlenség ellenőrzéséhez elég csak az $\underline{lv} = 0$ egyenlőséget vizsgálnunk valamennyi *d*-re (ahol a benne van az r út valamelyikében).
  - A hálózati kód választás már történhet akár véletlenszerűen is, amíg minden feltétel nem teljesül.
- Jaggi algoritmus komplexitása
  - $O(|A|dr(r+d))$

Jaggi, Sidharth, et al. "*Polynomial time algorithms for multicast network code construction*.", **IEEE Transactions on Information Theory**, 51.6 (2005): 1973-1982.

Random Linear Network Coding (RLNC)

- Minden csomópont véletlenszerűen választ (lokális) kódoló együtthatókat és konstruálja meg a hálózati kódot a kimeneti linkjein
- Válasszuk a testméretet $q = 2^m > d$, nézzünk pl. bájtonkénti kódolást $m = 8$.
- A nyelőnél tudni kell, hogy a bemeneti csomag milyen forrás csomag kombinációt tartalmaz:
  - a csomag fejlécében tároljuk *global encoding vector*-t ($\underline{g}$), kezdetben $g = ej = [0 \dots 010 \dots 0]$ a *j*-edik forrás csomagra (a transzfer mátrix adott csomaghoz tartozó sora)
  - minden továbbításkor a csomag bájtjain (**szimbólumain**), és magán a $\underline{g}$-n is ugyanazokat az algebrai műveleteket hajtjuk végre
  - A nyelőknek a kapott csomagok $\underline{g}$ vektoraiból alkotott mátrix sorain kell Gauss-eliminációt végezni (továbbá a csomag szimbólumain is)



Random Linear Network Coding (RLNC)

- A t_1 nyelőnél a bejövő csomagok $\underline{g}$ vektoraiból alkotott mátrix:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_5\xi_1 + \xi_6\xi_3 & \xi_5\xi_2 + \xi_6\xi_4 \end{pmatrix}$$

- Ha a fenti mátrix invertálható, akkor a csomagok tartalma dekódolható
- Minimális test méret (kis számítási komplexitás érdekében), ami felett a mátrix minden egyes nyelőnél nagy valószínűséggel dekódolható lesz: $\left(1 - \frac{|d|}{2^m}\right)^{|E|}$
- A példára (9 él, 2 nyelő, bájt) a dekódolhatóság valószínűsége 0.9825.